ANCIENS SUJETS

BAC + CORRO

(Burkina faso - Niger)

- 2018 (1er tour) : Burkina faso.
- 2019 (2eme tour) : Burkina faso.
- 2019 (1er tour) : Burkina faso.
- 2020 (2eme tour) : Burkina faso.
- 2020 (1er tour) : Burkina faso.
- 2021 (2eme tour) : Burkina faso.
- 2017 : Niger.
- 2021 (1er tour) : Burkina faso.

By Tehua
What: 05 05 46234613

Fomesoutra. Com ...

Côte d'Ivoire

BAC 2018 1er tour

Exercice n°1

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $u = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4}$ sous forme algébrique.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 2 cm).

a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 4i$ et $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.

b) Montrer que $u = \frac{z_C - 2i}{z_B - 2i}$.

c) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

4) Soit f l'application de $\mathcal{P}\setminus\{C\}$ dans $\mathcal{P}$, qui à tout point d'affixe z ($z \neq z_C$) associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$ telle que $z' = f(z) = \frac{z-4i}{z+\sqrt{3}-3i}$

a) Donner une interprétation géométrique du module et de l'argument de z'.

b) En déduire et construire l'ensemble (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.

c) En déduire et construire l'ensemble (D) des points M dont l'image par f est un élément du cercle de centre O et de rayon 1.

On donne : $\sqrt{3} = 1,7$.

Exercice n°2

Un sac contient quatre pièces marquées 500 F et six pièces marquées 200 F indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément trois pièces de ce sac.

On désigne par A, l'évènement « tirer une pièce de 500 F et deux pièces de 200 F ».

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.

1) Calculer la probabilité de l'évènement A

2- a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3) On répète cinq fois l'expérience en remettant à chaque fois les trois pièces tirées dans le sac.

Quelle est la probabilité que l'évènement A se réalise exactement trois fois à l'issue des cinq tirages ?

Problème

Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2 cm.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \ln x - x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan P.

Partie A

1- a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0, puis interpréter graphiquement le résultat.

2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter le résultat.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = e^x + x + 1$.

a) Calculer $g'(x)$ puis en déduire le sens de variation de g.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α et que $-1,28 < \alpha < -1,27$

d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

4) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

5-a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 0]$ $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $]-\infty; 0]$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

En déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

6) Construire les demi-tangentes à l'origine puis la courbe (C).

Partie B

On considère la suite (J_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ par : $J_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1) Donner une interprétation géométrique de J_n.

2-a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$ $f(n) \leq J_n$.

b) Démontrer que la suite (J_n) est divergente.

3) Calculer en cm² l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Partie C

On considère un mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du paramètre t par :

$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{2t}(t-1) \end{cases} t \in \mathbb{R}$

1) Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera. Tracer en pointillé la trajectoire de M. On la notera (Γ).

2) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant $t = \frac{\pi}{4}$.

On donne : $e^{-1,28} \simeq 0,278$; $e^{-1,27} \simeq 0,2808$; $e \simeq 2,7$; $e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,7$; $f(\alpha) \simeq -0,28$

BAC 2018 1^{er} tour

Exercice n°1

1) Déterminons les racines de u

Soit $\delta = x + iy$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel $\delta^2 = u$.

On a : $\delta^2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (1) \\ x^2 - y^2 = \frac{1}{2} & (2) \\ xy = \frac{\sqrt{3}}{4} & (3) \end{cases}$

- $(1) + (2): 2x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}$
- $(1) - (2): 2y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$ *ou* $y = -\frac{1}{2}$

Comme $xy > 0$, alors x *et* y sont de même signe.

Les racines de u sont : $\delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou

$\delta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

2) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$

$\Delta = (\sqrt{3} - 7i)^2 - 4[-4(3 + i\sqrt{3})] = 2 + 2i\sqrt{3} = 4u$

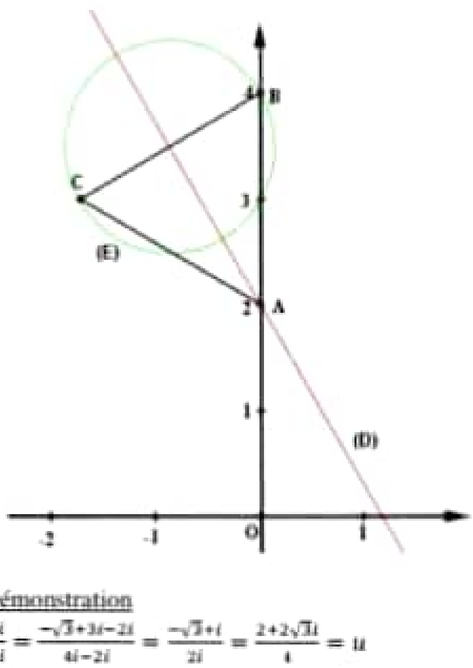
D'après 1), les racines carrées de Δ sont : $\sqrt{3} + i$ et $-\sqrt{3} - i$.

D'où $z_1 = \frac{-\sqrt{3}+7i+\sqrt{3}+i}{2} = 4i$ et

$z_2 = \frac{-\sqrt{3}+7i-\sqrt{3}-i}{2} = -\sqrt{3} + 3i$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{4i; -\sqrt{3} + 3i\}}$

3-a) Plaçons les points A, B et C dans le repère



b) Démonstration

$\frac{z_C - 2i}{z_B - 2i} = \frac{-\sqrt{3}+3i-2i}{4i-2i} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2i} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} = u$

Donc $\frac{z_C - 2i}{z_B - 2i} = u$

c) Nature du triangle ABC

$\frac{z_C - 2i}{z_B - 2i} = u \Leftrightarrow \frac{z_C - 2i}{z_B - 2i} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow AC = AB$ et

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D'où ABC est un triangle équilatéral.

4-a) Interprétation géométrique du module et de l'argument de z'

$z' = \frac{z-4i}{z+\sqrt{3}-3i} = \frac{z-z_B}{z-z_C}$ $|z'| = \frac{MB}{MC}$ et $\arg(z') = (\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MB})$

b) Déduction de l'ensemble (E)

$z' \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \begin{cases} z' \neq 0 \\ \arg(z') = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$z' \neq 0 \Leftrightarrow z \neq z_B \Leftrightarrow M \neq B$

$\arg(z') = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(E) est l'ensemble des points du cercle de diamètre $[BC]$ privé des points B et C.

c) Déduisons et construisons l'ensemble (D)

$f(M') \in C(0;1) \Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 1 \Leftrightarrow MB = MC$

(D)est la médiatrice du segment $[BC]$.

Exercice n°2

1) Probabilité de l'évènement A

$p(A) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2}$

2-a) Déterminons les valeurs prises par X

$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$ où Ω est l'univers des éventualités.

b) Déterminons la loi de probabilité de X

$p(X = 0) = \frac{C_4^0 \times C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

$p(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

$p(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$

$p(X = 3) = \frac{C_4^3 \times C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

Le tableau suivant résume la loi de probabilité de X

k	0	1	2	3	Total
$p(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

c) Espérance mathématique de X

$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

3) Soit Y le nombre de fois où l'évènement A se réalise au cours des tirages.

Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ *et* $p = \frac{1}{2}$

$p(Y = 3) = C_5^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}$

$\boxed{p(Y = 3) = \frac{5}{16}}$

Problème

$\begin{cases} f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \ln x - x^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Partie A

1- a) Etudions la continuité de f en 0

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} [x^2 \ln x - x^2] = 0$ car $\lim_{x \to 0^+} [x^2 \ln x] = 0$

  Comme $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$ alors f est continue en 0.

b) Etudions la dérivabilité de f en 0

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{2}$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} [x \ln x - x] = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

  Conclusion :

  Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

  Interprétation graphique

  La courbe (C) admet au point $O(0;0)$ une demi tangente à gauche de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ et une demi tangente à droite, horizontal.

2) Calcul de la limite et interprétation

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x[\ln x - 1] = +\infty$

Interprétation

La courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3-a) Calcul de $g'(x)$

g est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a : $g'(x) = e^x + 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Calcul des limites de g

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + x + 1) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + x + 1) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty \end{cases}$

c) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule α et que $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$

g est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable et strictement croissante.

Donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. De plus :

$g(-1{,}28) = e^{-1{,}28} - 1{,}28 + 1 = -0{,}002$

$g(-1{,}27) = e^{-1{,}27} - 1{,}27 + 1 = 0{,}0108$

$g(-1{,}28) \times g(-1{,}27) < 0$.

D'où $-1{,}28 < \alpha < -1{,}27$.

d) Signe de $g(x)$

- $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$
- $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$
- $g(\alpha) = 0$

5-a) Montrons que $\forall x \in]-\infty; 0]$ $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$.

f est dérivable sur $]-\infty; 0]$ comme quotient de fonctions dérivables.

$f'(x) = \frac{(1+x)e^x(e^x+1) - xe^x.e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$

On a bien : $\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ $\forall x \in]-\infty; 0]$.

Déduction du signe de $f'(x)$

$\forall x \in]-\infty; 0]$, $e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$

- $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; \alpha[$
- $\forall x \in]\alpha; 0], g(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $]\alpha; 0]$.

Déduction le sens de variation de f

- $\forall x \in]-\infty; \alpha[$, $f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$.
- $\forall x \in]\alpha; 0]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]\alpha; 0]$.

b) Calculons $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} - 2x = 2x \ln x - x$

$f'(x) = x[\ln x - 1]$

Signe de $f'(x)$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}}$

$\forall x \in \left]0; e^{\frac{1}{2}}\right[$ $f'(x) < 0$ et $\forall x \in \left]e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$ $f'(x) > 0$

Sens de variation de f

$\forall x \in \left]0; e^{\frac{1}{2}}\right[$ $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]0; e^{\frac{1}{2}}\right[$

$\forall x \in \left]e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$ $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left]e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$.

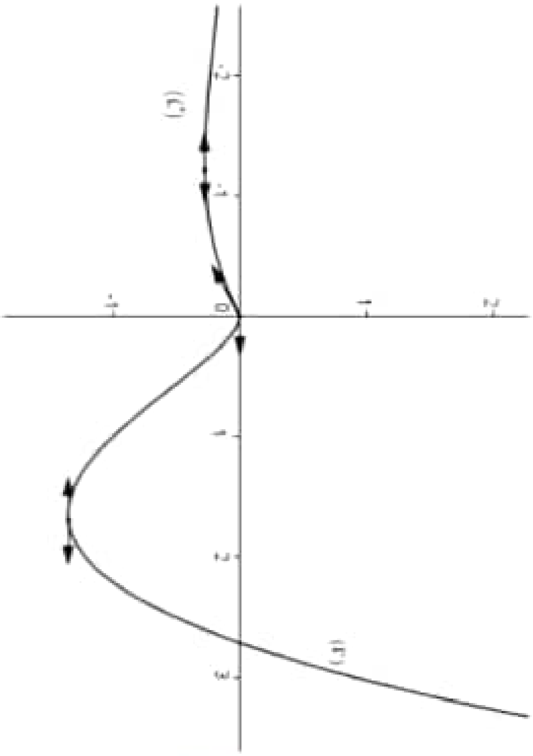
c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	||	-	0	+	
$f(x)$	0	↘	-0,28	↗	0	↘	$-\frac{e}{2}$	↗	$+\infty$

Calcul des limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2[\ln x - 1] = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - 1) = +\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{e^x+1} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1 \end{cases}$

6) Représentation graphique de f



Partie B

1) Donnons une interprétation géométrique de J_n

J_n est l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = n$ et $x = n + 1$.

2-a) Démontrons que pour tout entier naturel $n \geq 3$ $f(n) \leq J_n$

Comme f est croissante sur $[3; +\infty[$ alors $f(n) \leq f(t)$

$$f(n) \leq f(t) \Leftrightarrow \int_n^{n+1} f(n)dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow f(n)[t]_n^{n+1} \leq J_n \Leftrightarrow f(n) \leq J_n$$

D'où le résultat.

b) Démontrons que la suite (J_n) est divergente

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = +\infty$.

Par suite la suite (J_n) est divergente.

3) Calcul de A

$$A = \left(\int_1^e -f(x)dx\right)u.a = 4\int_1^e (x^2 - x^2 \ln x)dx$$

$$A = 4\left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^e - A_1\right) \text{ avec } A_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx$$

Calculons A_1

Soit $u(x) = \ln x$ $\qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2$ $\qquad v(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$A_1 = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1)$$

$$A = 4\left[\frac{1}{3}(e^3 - 1) - \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{9}(e^3 - 1)\right]$$

$$\boxed{A = 4\left(\frac{1}{9}e^3 - \frac{4}{9}\right) cm^2}$$

Partie C

1) Montrons que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera

$$(\Gamma) \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{2t}(t - 1) \end{cases}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, e^t > 0$ donc $x(t) > 0$ alors $x \in]0; +\infty[$

$x(t) = e^t \Leftrightarrow t = \ln(x(t))$

$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{2t}(t - 1) = e^{2\ln(x(t))}(\ln(x(t)) - 1)$

$y(t) = x^2(t).\ln(x(t)) - x^2(t)$

D'où $\begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ y = x^2 \ln(x) - x^2 \end{cases}$

Donc (Γ) est la partie de (C) sur $]0; +\infty[$.

Pour la courbe de (Γ), voir représentation graphique.

2) Coordonnées du vecteur vitesse à l'instant $t = \frac{\pi}{4}$

$$\vec{v}(t)\begin{pmatrix} x'(t) = e^t \\ y'(t) = (2t-1)e^{2t} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{4}} \\ \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)e^{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$$

BAC 2019 2nd tour

Exercice n°1

Soit (Γ) la courbe paramétrée définie par :

$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

On considère $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$.

1) Comparer :

a) $M(t+2\pi)$ et $M(t)$.

b) $M(-t)$ et $M(t)$.

c) $M(\pi - t)$ et $M(t)$.

2) Etudier les éléments de symétrie de (Γ).

Justifier qu'on peut réduire le domaine d'étude de (Γ) à l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Etudier les variations de x *et* y et donner leurs variations dans un tableau commun.

4- a) Déterminer les équations des tangentes à la courbe (Γ) aux points de paramètres respectifs : $0; \frac{\pi}{3}$ *et* $\frac{\pi}{2}$.

b) Construire (Γ) et les tangentes aux points de paramètres respectifs $0; \frac{\pi}{3}$ *et* $\frac{\pi}{2}$.

(Unité graphique : 4 cm)

Exercice n°2

On munit l'espace d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ et on considère les points A, B et C tels que : $A(-1; 2; -3)$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + \vec{k} - 2\vec{j}$, $C(0; -2; 0)$.

1) Déterminer les coordonnées du point B.

2) Soit D un point de l'espace tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$. En déduire la nature exacte du quadrilatère ABCD.

b) Calculer les coordonnées du point D.

3) Calculer (en unité de longueur) la distance :

a) d_1 du point O à la droite (AB).

b) d_2 du point O au plan (ABC).

4) Calculer (en unité de volume) le volume v de la pyramide de base ABCD et de sommet O.

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = 1 - (x^2 - 4x + 5)e^{-x+1}$

1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition

2) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

3- a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in [1{,}35; 1{,}36]$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x - 3 + (x^2 - 2x + 3)e^{-x+1}$

On note (C) la courbe représentative de dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$: unité 2 cm.

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2-a) Montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout réel x, avec f' la dérivée de f.

Etudier le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3-a) Montrer que la droite (D): $y = x - 3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à (D).

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

4) Tracer (D), (T) et (C).

Partie C

1) A l'aide d'une double intégration par parties, calculer l'intégrale : $I = \int_1^{\alpha} (x^2 - 2x + 3)e^{-x+1}dx$

2) En déduire l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ (en cm²) du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = \alpha$, $y = 0$ et la courbe (C).

On donne : $e^{-0{,}35} \approx 0{,}7$; $e^{-0{,}36} \approx 0{,}69$; $e \approx 2{,}7$
$e^{-1} \approx 0{,}36$; $f(\alpha) \approx -0{,}2$.

BAC 2019 2nd tour

Exercice n°1

$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

1) Comparons :

a) $M(t+2\pi)$ et $M(t)$

$\begin{cases} x(t+2\pi) = \sin(t+2\pi) = \sin t = x(t) \\ y(t+2\pi) = \cos 3(t+2\pi) = \cos 3t = y(t) \end{cases}$

Donc $M(t+2\pi) = M(t)$.

b) $M(-t)$ et $M(t)$

On a : $\begin{cases} x(-t) = \sin(-t) = -\sin t = -x(t) \\ y(-t) = \cos(-3t) = \cos 3t = y(t) \end{cases}$

$M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

c) $M(\pi - t)$ et $M(t)$

On a : $\begin{cases} x(\pi - t) = \sin(\pi - t) = \sin t = x(t) \\ y(\pi - t) = \cos(\pi - 3t) = -\cos 3t = -y(t) \end{cases}$

$M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses .

2) Etudions les éléments de symétrie de (Γ)

- L'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe (Γ).
- L'axe des abscisses est un axe de symétrie pour la courbe (Γ).

Justifions qu'on peut réduire le domaine d'étude à l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

- $M(t+2\pi) = M(t)$, on obtient entièrement la courbe (Γ) en étudiant x et y sur un intervalle d'amplitude 2π c'est-à-dire $[-\pi; \pi]$.
- Comme (Γ) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on peut restreindre l'étude de (Γ) à l'intervalle $[0; \pi]$.
- Puisque (Γ) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on peut réduire l'étude de (Γ) à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Etudions les variations de x et y et donnons leurs variations dans un tableau commun.

- x est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], x'(t) = \cos t$

  $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], x'(t) \geq 0$

  Donc x est croissante sur I.

- y est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y'(t) = -3\sin 3t$

  $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], y'(t) \leq 0$ donc y est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

  $\forall t \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right], y'(t) \geq 0$ donc y est croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$

<u>Tableau de variation de</u> x et y

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	1	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	0
$x(t)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1
$y(t)$	1	↘	-1	↗	0
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	3

4- a) Déterminer les équations des tangentes à la courbe (Γ)

- $M(0)(0;1)$ $x'(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

  Donc $(T_0) : y = 1$

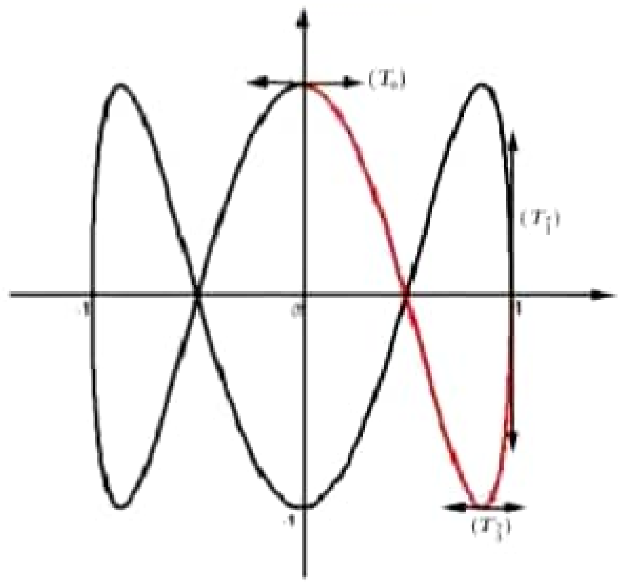
- $M(\frac{\pi}{3})(\frac{\sqrt{3}}{2}; -1)$ $x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

  Donc $\left(T_{\frac{\pi}{3}}\right) : y = -1$

- $M(\frac{\pi}{2})(1;0)$ $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

  Donc $\left(T_{\frac{\pi}{2}}\right) : x = 1$

b) Construisons (Γ) et les tangentes



Exercice n°2

1) Déterminons les coordonnées du point B

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z+3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \\ y-2 = -2 \\ z+3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$

$\boxed{B(2; 0; -2)}$

2-a) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et déduisons la nature exacte du quadrilatère ABCD.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times(-2)+(-2)\times(-2)+1\times 2 = 0$

Nature exacte du quadrilatère ABCD

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ⇔ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (AB)\perp(BC)$

$AB = \sqrt{14}$ et $BC = 2\sqrt{3}$

On en déduit que ABCD est un rectangle.

b) Calculons les coordonnées du point D

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\\z+3\end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\y=0\\z=-1\end{cases}$ $\boxed{D(-3;0;-1)}$

3) Calculons les distances en unité de longueur

a) $d_1 = \frac{\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-8\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{36+64+36} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\boxed{d_1 = \frac{4\sqrt{21}}{7}\ u.l}$

b) $d_2 = \frac{|\overrightarrow{BO}.(\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC})|}{\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\|}$ $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\8\\10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BO}.(\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}) = -4+0+20 = 16$

$\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4+64+100} = \sqrt{168} = 2\sqrt{42}$

$\boxed{d_2 = \frac{4\sqrt{42}}{21}\ u.l}$

4) Calculons le volume v en unité de volume

$V = \frac{1}{3}A\times d_2$ A étant l'aire de ABCD

$V = \frac{1}{3}\sqrt{14}\times 2\sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{42}}{21}\ u.v = \frac{16}{3}\ u.v$ $\boxed{V = \frac{16}{3}\ u.v}$

Problème

Partie A

$g(x) = 1-(x^2-4x+5)e^{-x+1}$

1) Calculons les limites de g aux bornes de D_g

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-(x^2-4x+5)e^{-x+1}) = -\infty$

car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}[-(x^2-4x+5)] = -\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[1-(x^2e^{-x}-4xe^{-x}+5e^{-x})e]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\end{cases}$

2) Etudions le sens de variation de g et dressons son tableau de variation

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x) = (x-3)^2e^{-x+1}$

$g'(3) = 0$ et $g'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{3\}$ car $(x-3)^2>0$ et $e^{-x+1}>0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	1

3-a) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha\in[1,35;1,36]$

g est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty;1[$.

Comme $0\in]-\infty;1[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

$g(1,35) = 1-(1,35^2-4\times1,35+5)e^{-0,35} \simeq -0,002$

$g(1,36) = 1-(1,36^2-4\times1,36+5)e^{-0,35} \simeq 0,016$

$g(1,35)\times g(1,36)<0$ donc $\alpha\in[1,35;1,36]$.

b) Déduisons le signe de $g(x)$

$\forall x\in]-\infty;\alpha], g(x)\le 0$ $\forall x\in[\alpha;+\infty[, g(x)\ge 0$

Partie B

$f(x) = x-3+(x^2-2x+3)e^{-x+1}$

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x-3+(x^2-2x+3)e^{-x+1}]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x-3+(x^2e^{-x}-2xe^{-x}+3e^{-x})e]$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)e^{-x+1}\right)\right]$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty\end{cases}$

2-a) Montrons que $f'(x) = g(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,

$f'(x) = 1+(2x-2)e^{-x+1}-(x^2-2x+3)e^{-x+1}$

$f'(x) = 1-(x^2-4x+5)e^{-x+1} = g(x)$

Etudions le sens de variation de f

$\forall x\in]-\infty;\alpha], g(x)\le 0$ donc $f'(x)\le 0$.

D'où f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$

$\forall x\in[\alpha;+\infty[, g(x)\ge 0$ donc $f'(x)\ge 0$.

D'où f est croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

b) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3-a) Montrons que (D) est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\to+\infty}[(x^2-2x+3)e^{-x+1}] = 0$ car

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Donc la droite $(D): y = x-3$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Etudions la position relative de (C) par rapport à (D)

$f(x)-(x-3) = (x^2-2x+3)e^{-x+1}$

$f(x)-(x-3)$ est du signe de x^2-2x+3.

$\Delta = 4-12 = -8<0$ donc $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-2x+3>0$

Par conséquent, $f(x) - (x-3) > 0$.

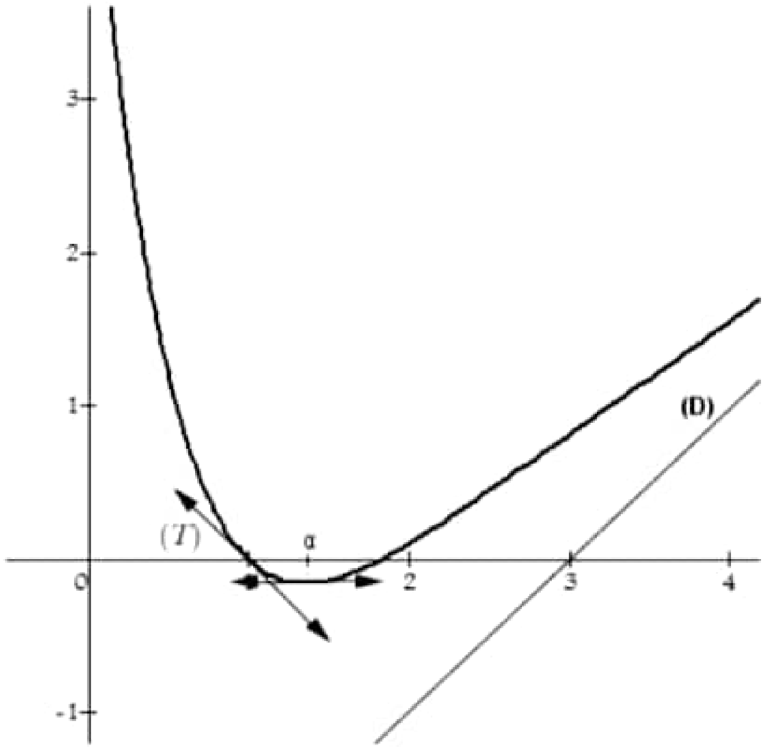
Ainsi, (C) est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

c) <u>Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1</u>

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad f'(1) = -1 \,;\, f(1) = 0$

$\boxed{(T): y = -x + 1}$

4) Traçons $(D), (T)$ *et* (C)



Partie C

1) <u>Calculons I à l'aide d'une intégration par parties</u>

$I = \int_1^{\alpha} (x^2 - 2x + 3)e^{-x+1} dx$

Soit $u(x) = x^2 - 2x + 3 \qquad u'(x) = 2x - 2$

$\quad v'(x) = e^{-x+1} \qquad v(x) = -e^{-x+1}$

$I = [-(x^2 - 2x + 3)e^{-x+1}]_1^{\alpha} + \int_1^{\alpha} (2x-2)e^{-x+1} dx$

$I = [-(x^2 - 2x + 3)e^{-x+1}]_1^{\alpha} + K$ avec

$K = \int_1^{\alpha} (2x-2)e^{-x+1} dx$

Soit $u(x) = 2x - 2 \qquad u'(x) = 2$

$\quad v'(x) = e^{-x+1} \qquad v(x) = -e^{-x+1}$

$K = [-(2x-2)e^{-x+1}]_1^{\alpha} + 2\int_1^{\alpha} e^{-x+1} dx$

$K = -(2\alpha - 2)e^{-\alpha+1} - 2(e^{-\alpha+1} - 1)$

$I = -(\alpha^2 - 2\alpha + 3)e^{-\alpha+1} + 2 - (2\alpha - 2)e^{-\alpha+1} - 2(e^{-\alpha+1} - 1)$

$\boxed{I = 4 + (\alpha^2 + 3)e^{-\alpha+1}}$

2) <u>Déduisons l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$</u>

$\mathcal{A}(\alpha) = -\int_1^{\alpha} f(x)dx \times ua$

$\mathcal{A}(\alpha) = -4\left[\int_1^{\alpha} (x-3)dx - \int_1^{\alpha} (x^2 - 2x + 3)e^{-x+1} dx\right]$

$\mathcal{A}(\alpha) = 4\left(-\left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^{\alpha} - I\right)$

$\boxed{\mathcal{A}(\alpha) = 4\left[-\frac{1}{2}\alpha^2 + 3\alpha - \frac{13}{2} + (\alpha^2 + 3)e^{-\alpha+1}\right] cm^2}$

BAC 2019 1er tour

Exercice n°1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique 1cm.

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ pour tout z par :

$P(z) = z^3 - 3z^2 + (3i + 3)z - 6 + 2i$.

1) Calculer $P(i)$, puis en déduire une factorisation de $P(z)$.

2- a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

b) Soient les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 3 - i$.

Placer les points A, B et C dans le repère.

c) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ puis interpréter géométriquement le module et un argument de ce quotient.

En déduire la nature du triangle ABC

3) Soit D l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a) Calculer l'affixe du point D.

b) Donner la nature exacte du quadrilatère ABDC.

Exercice n°2

Une urne contient cinq boules portant le numéro 2 ; quatre boules portant le numéro 3 et trois boules portant le numéro 4

On tire simultanément trois boules de l'urne.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables

1) Déterminer les probabilités des évènements suivants :

A : « Tirer au moins 1 boule portant le numéro 3 »

B : « Tirer 3 boules portant des numéros tous différents »

C : « Tirer 3 boules portant le même numéro »

D : « Tirer 3 boules dont exactement 2 portent le même numéro »

2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros marqués sur les trois boules tirées.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer ma loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

3) On appelle succès l'évènement E : « $(X \geq 10)$ »

a) Calculer la probabilité de E.

b) On répète trois fois l'expérience de manière indépendante. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux succès.

On donne : $\frac{23}{110} \approx 0,2$; $\frac{87}{110} \approx 0,7$

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - x + \ln(2x - 3) \text{ si } x > 2 \\ f(x) = -x + 1 + e^{x-2} \text{ si } x \leq 2 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm. On notera f' la dérivée de f.

Partie A

1) Etudier la continuité de f en 2

2-a) Vérifier $\frac{f(x)}{x-2} = -1 + 2\frac{\ln[2(x-2)+1]}{2(x-2)}$ $\forall x > 2$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3- a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

b) Vérifier que pour tout $x \geq 2$, on a :

$f(x) = 2 - x(1 - \frac{2x-3}{x} \cdot \frac{\ln(2x-3)}{2x-3})$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + x]$.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) Montrer que (C) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$.

5- a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ puis étudier son signe

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

6) Tracer (C), (Δ), la tangente et les demi-tangentes éventuelles.

Partie B

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est dans l'intervalle $I = [3; 4]$.

(On notera α celle qui est dans I)

2) On considère la fonction g définie sur $[2; +\infty[$ par $g(x) = 2 + \ln(2x - 3)$

a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$

b) Montrer que : i) $g(x) \in I$, pour tout $x \in I$.

ii) $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$, pour tout $x \in I$.

c) En déduire que : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$, $\forall x \in I$

Partie C

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.

2) En déduire que pour tout entier naturel n,

a) $|u_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.

b) $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3) Etudier la convergence de la suite (u_n).

4) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

Données : $\ln 2 \approx 0,7$; $\ln 3 \approx 1,1$; $\ln 5 \approx 1,6$; $\ln 10 \approx 2,3$; $\ln\frac{2}{3} \approx -0,4$; $e^{-1} \approx 0,3$; $e^{-2} \approx 0,1$.

BAC 2019 1er tour

Exercice n°1

$P(z) = z^3 - 3z^2 + (3i + 3)z - 6 + 2i$

1) Calculons $P(i)$

$P(-i) = (-i)^3 - 3(-i)^2 + (3i + 3)(-i) - 6 + 2i$

$P(-i) = i + 3 + 3 - 3i - 6 + 2i = 0$

Déduisons une factorisation de $P(z)$

Comme $P(-i) = 0$ alors $P(z)$ est factorisable par $z + i$

$P(z) = (z + i)(z^2 + bz + c)$

$P(z) = z^3 + (b + i)z^2 + (c + bi)z + ci$

Par identification $\begin{cases} b + i = -3 \\ c + bi = 3 + 3i \\ ci = -6 + 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 - i \\ c = 6 + 2i \end{cases}$

Donc $P(z) = (z + i)[z^2 - (3 + i)z + 2 + 6i]$

2-a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -i \text{ ou } z^2 - (3 + i)z + 2 + 6i = 0$

Prenons : $z^2 - (3 + i)z + 2 + 6i = 0$

$\Delta = [-(3 + i)]^2 - 4(1)(2 + 6i) = 9 + 6i - 1 - 8 - 24i$

$\Delta = -18i$ Soit $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On a :

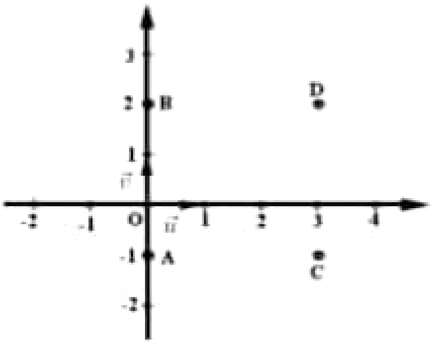
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 9 \\ xy = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ y = -3 \text{ ou } y = 3 \\ xy = -9 \end{cases}$

Donc $\delta = 3 - 3i$ ou $\delta = -3 + 3i$

$z_1 = \frac{3+i-3+3i}{2} = 2i \qquad z_2 = \frac{3+i+3-3i}{2} = 3 - i$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-i; 2i; 3 - i\}}$

b) Plaçons les points A, B et C dans le repère



c) Calculons $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ puis interprétons géométriquement le module et un argument de ce quotient

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3-i+i}{2i+i} = \frac{3}{3i} = -i$

$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |-i| \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = 1 \Leftrightarrow AB = AC$

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(-i) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Déduisons-en la nature du triangle ABC

On a : $AB = AC$ donc ABC est un triangle isocèle de sommet A.

Aussi $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc ABC est un triangle rectangle en A.

En somme, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

3-a) Calculons l'affixe du point D

$t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_D - z_C = z_B - z_A$

$\Leftrightarrow z_D = z_B - z_A + z_C = 2i + i + 3 - i$

$\boxed{z_D = 3 + 2i}$

b) Donnons la nature exacte du quadrilatère ABDC

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ donc ABDC est un parallélogramme.

De plus, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A ; donc ABDC est un carré.

Exercice n°2

$card\Omega = C_{12}^3 = \frac{A_{12}^3}{3!} = 220$

1) Déterminons la probabilité des évènements

- $p(A) = 1 - p(\bar{A})$ où $\bar{A}$ désigne l'évènement : « Ne tirer aucune boule portant le numéro 3 »

  $card\bar{A} = C_8^3 = \frac{A_8^3}{3!} = 56$

  Donc $p(A) = 1 - \frac{56}{220}$ $\boxed{p(A) = \frac{41}{55}}$
- $cardB = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60$

  Donc $p(B) = \frac{60}{220}$ $\boxed{p(B) = \frac{3}{11}}$
- $cardC = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 15$

  Donc $p(C) = \frac{15}{220}$ $\boxed{p(C) = \frac{3}{44}}$
- $cardD = C_5^2 \times C_7^1 + C_4^2 \times C_8^1 + C_3^2 \times C_9^1 = 145$

  Donc $p(D) = \frac{145}{220}$ $\boxed{p(A) = \frac{29}{44}}$

2-a) Déterminons les valeurs prises par X

$X(\Omega) = \{6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

$p(X = 6) = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$

$p(X = 7) = \frac{C_5^2 \times C_4^1}{220} = \frac{40}{220} = \frac{2}{11}$

$p(X = 8) = \frac{C_5^2 \times C_3^1 + C_5^1 \times C_4^2}{220} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$

$p(X = 9) = \frac{C_4^3 + C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{220} = \frac{64}{220} = \frac{16}{55}$

$p(X = 10) = \frac{C_5^1 \times C_3^2 + C_4^2 \times C_3^1}{220} = \frac{33}{220} = \frac{3}{20}$

$p(X = 11) = \frac{C_4^1 \times C_3^2}{220} = \frac{12}{220} = \frac{3}{55}$

$p(X = 12) = \frac{C_3^3}{220} = \frac{1}{220}$

Tableau résumant la loi de probabilité de X

x_i	6	7	8	9	10	11	12
$p(X = x_i)$	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{64}{220}$	$\frac{33}{220}$	$\frac{12}{220}$	$\frac{1}{220}$

c) Calculons l'espérance mathématique de X

$E(X) = \sum_{i=1}^{7} x_i p_i = \frac{1870}{220} = \frac{17}{2} = 8,5$

3-a) Calculons la probabilité de l'évènement E

$p(E) = p(X \geq 10)$

$p(E) = p(X = 10) + p(X = 11) + p(X = 12)$

$p(E) = \frac{46}{220} = \frac{23}{110}$

b) Calculons la probabilité d'obtenir exactement deux succès

Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{23}{110}$

$p(Y = 2) = C_3^2 \left(\frac{23}{110}\right)^2 \left(\frac{87}{110}\right) \simeq 0,084$

$\boxed{p(Y = 2) \simeq 0,084}$

Problème

Partie A

1) Etudions la continuité de f en 2

$f(2) = 2 - 2 + \ln(4 - 3) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(-x+1+e^{x-2}) = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$. Donc f est continue en 2.

2-a) Vérifions l'égalité

Pour $x > 2$, $\frac{f(x)}{x-2} = \frac{2-x+\ln(2x-3)}{x-2}$

$\frac{f(x)}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} + \frac{\ln[2x-4+1]}{x-2}$

$\frac{f(x)}{x-2} = -1 + 2\frac{\ln[2(x-2)+1]}{2(x-2)}$

Donc pour $x > 2$, $\frac{f(x)}{x-2} = -1 + 2\frac{\ln[2(x-2)+1]}{2(x-2)}$

b) Etudions la dérivabilité de f en 2

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[-1+2\frac{\ln[2(x-2)+1]}{2(x-2)}\right]$

Posons $X = x-2$; $x = X+2$ $x \to 2^+$, $X \to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{X\to 0^+}\left[-1+2\frac{\ln(2X+1)}{2X}\right] = 1$ car

$\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{\ln(2X+1)}{2X} = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-x+1+e^{x-2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-x+2+e^{x-2}-1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\left[-1+\frac{e^{x-2}-1}{x-2}\right]$

Posons $X = x-2$; $x = X+2$ $x \to 2^-$, $X \to 0^-$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{X\to 0^-}\left[-1+\frac{e^X-1}{X}\right] = 0$

car $\lim\limits_{X\to 0^-}\frac{e^X-1}{X} = 1$

Comme $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ alors f n'est pas dérivable en 2.

Interprétation géométrique

La courbe (C) admet au point d'abscisse 2 une demi-tangente de coefficient directeur 1 et une demi tangente horizontale à gauche de 2.

3-a) Calculons la limite de f en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(-x+1+e^{x-2}) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x+1) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-2) = -\infty$

$\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$

b) Vérification

on a : $2 - x\left(1 - \frac{2x-3}{x}\times\frac{\ln(2x-3)}{2x-3}\right) =$

$2 - x + \frac{x(2x-3)}{x}.\frac{\ln(2x-3)}{2x-3}) = 2 - x + \ln(2x-3) = f(x)$

Donc pour $x \geq 2$, $f(x) = 2 - x\left(1 - \frac{2x-3}{x}\times\frac{\ln(2x-3)}{2x-3}\right)$

Déduction

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[2 - x\left(1-\frac{2x-3}{x}\times\frac{\ln(2x-3)}{2x-3}\right)\right] = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x-3}{x} = 2$ et $\lim\limits_{X\to +\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{2}{x}-\left(1-\frac{2x-3}{x}\times\frac{\ln(2x-3)}{2x-3}\right)\right] = -1$

c) Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)+x]$

$\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)+x] = \lim\limits_{x\to +\infty}[2+\ln(2x-3)] = +\infty$

Interprétation géométrique

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-(-x)] = +\infty$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite (D) d'équation $y = -x$.

4) Montrons que la courbe (C) admet une asymptote oblique

Pour $x < 2$, on a : $f(x) = -x + 1 + e^{x-2}$

avec $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x-2} = 0$.

Donc la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$.

5) Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$

- Pour $x \geq 2$, $f(x) = 2 - x + \ln(2x-3)$
  f est dérivable sur $]2;+\infty[$ et on a :
  $f'(x) = -1 + \frac{2}{2x-3} = \frac{-2x+5}{2x-3}$
- Pour $x < 2$, $f(x) = -x + 1 + e^{x-2}$
  f est dérivable sur $]-\infty;2[$ et on a :
  $f'(x) = -1 + e^{x-2}$

Etudions le signe de $f'(x)$

- $f'(x) = \frac{-2x+5}{2x-3}$ sur $]2;+\infty[$
  Pour $x > 2$, $2x - 3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x+5$.
  - ✓ Sur $\left]2;\frac{5}{2}\right[$, $f'(x) > 0$
  - ✓ Sur $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$, $f'(x) < 0$
- $f'(x) = -1 + e^{x-2}$ sur $]-\infty;2[$
  $x \in]-\infty;2[\Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow e^{x-2} < 1$
  Donc $-1 + e^{x-2} < 0$
  $\forall x \in]-\infty;2[, f'(x) < 0$.
- En résumé, $f'(x) < 0$ sur $]-\infty;2[\cup \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ et
  $f'(x) > 0$ sur $\left]2;\frac{5}{2}\right[$

b) Déduisons-en le sens de variation de f

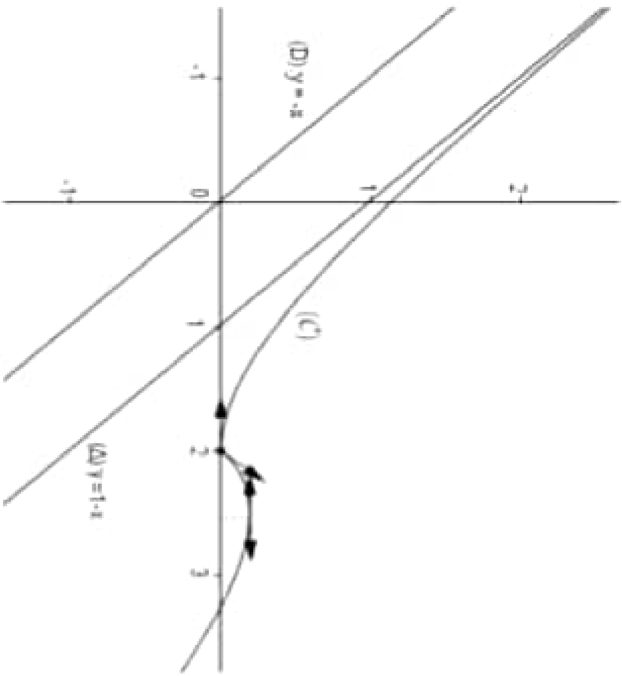
f est décroissante sur $]-\infty;2[$ et sur $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

f est croissante sur $\left]2;\frac{5}{2}\right[$.

c) Tableau de variation

x	$-\infty$		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0 \Vert 1$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$0,2$	$\searrow$	$-\infty$

6) Représentation graphique de la courbe (C)



Partie B

1) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions

- Sur $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$ admet un minimum en $x = 2$ qui est 0 ; donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $\left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$ qui est 2.
- Sur $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante ; donc réalise une bijection de $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ vers $f\left(\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[\right) =]-\infty; 0{,}2]$. Comme $0 \in]-\infty; 0{,}2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$.

En somme, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions qui sont 0 et α.

De plus on a : $f(3) = -1 + \ln 3 = 0{,}1$ et
$f(5) = -2 + \ln 5 = -0{,}4$
$f(3) \times f(4) < 0$ donc $\alpha \in [3; 4]$.

2-a) Vérifions que $g(\alpha) = \alpha$

$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha + \ln(2\alpha - 3) = 0$
$\qquad \Leftrightarrow 2 + \ln(2\alpha - 3) = \alpha$

Donc $g(\alpha) = \alpha$

b) Montrons que :

i) $g(x) \in I$, pour tout $x \in I$

$x \in I \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4$
$\quad \Leftrightarrow 3 \leq 2x - 3 \leq 5$
$\quad \Leftrightarrow \ln 3 \leq \ln(2x - 3) \leq \ln 5$
$\quad \Leftrightarrow 2 + \ln 3 \leq 2 + \ln(2x - 3) \leq 2 + \ln 5$
$\quad \Leftrightarrow 3 \leq 3{,}1 \leq g(x) \leq 3{,}6 \leq 4$

Donc $\forall x \in I, g(x) \in I$

ii) $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$, pour tout $x \in I$

g est dérivable sur $[2; +\infty[$ en particulier sur $[3; 4]$

$\forall x \in I, g'(x) = \frac{2}{2x-3}$

$x \in I \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4$
$\quad \Leftrightarrow 3 \leq 2x - 3 \leq 5$
$\quad \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{2x-3} \leq \frac{1}{3}$
$\quad \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq \frac{2}{5} \leq g'(x) \leq \frac{2}{3}$
$\quad \Leftrightarrow |g'(x)| \leq \frac{2}{3}$

Donc $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

c) Déduire que : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$, $\forall x \in I$

On sait que $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{2}{3}$ et $\alpha \in I$.

En appliquant le théorème de l'inégalité de la moyenne à $g'(x)$ sur l'intervalle $[\alpha; x]$, on a :

$\left|\int_\alpha^x g'(x)dx\right| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha| \Leftrightarrow |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$

Or $g(\alpha) = \alpha$. D'où $\forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$.

Partie C

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$

1) Montrons que $\forall n, u_n \in I$

On a : $u_0 = 3$ donc $u_0 \in I$. La proposition est vraie pour u_0.

Supposons que $\forall n$, $u_n \in I$ et montrons que $u_{n+1} \in I$

On sait que $\forall x \in I, g(x) \in I$.

Comme $u_n \in I$ alors $g(u_n) \in I$. Par suite $u_{n+1} \in I$ puisque $u_{n+1} = g(u_n)$.

Conclusion : $\forall n, u_n \in I$

2- a) Déduisons que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

Comme $\alpha \in I$ et $u_n \in I, \forall n$ d'après B) 2) on a :

$|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$ car $g(u_n) = u_{n+1}$

b) Montrons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

on a : $\alpha \in [3; 4] \Leftrightarrow 3 \leq \alpha \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq -\alpha \leq -3$
$\qquad \Leftrightarrow -1 \leq u_0 - \alpha \leq 0 \leq 1$
$\qquad \Leftrightarrow |u_0 - \alpha| \leq 1 \Leftrightarrow |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$

On a $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$.

La proposition est vraie pour $n = 0$.

Supposons que pour $n > 0$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow \frac{2}{3} \times |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3}$
$\qquad \Leftrightarrow \frac{2}{3} \times |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Finalement $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} \times |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

3) Etudions la convergence de la suite (u_n)

Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$. Donc (u_n) converge vers α.

4) <u>Déterminons le plus petit entier naturel</u> n_0

$$|u_n - \alpha| \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0} \leq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow n_0 \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq -3\ln 10$$

$$\Leftrightarrow n_0 \geq \frac{-3\ln 10}{\ln(\frac{2}{3})}$$

$$\Leftrightarrow n_0 \geq 17{,}25 \qquad \boxed{n_0 = 18}$$

BAC 2020 2nd tour

Exercice n°1

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' + 2y = 2x + 5$.

On suppose que l'équation (E) admet une solution particulière g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ où a et b sont des réels à déterminer.

1) Déterminer les réels a et b.

2) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y' + 2y = 0$

3) On note f la solution de (E).

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E').

b) Déduire l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c) Déterminer la solution h de (E) qui s'annule en 0

Exercice n°2

Soient les intégrales I et J définies par :

$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$

1- a) Montrer que pour tout x:

$\cos^4 x = \cos x\,(\cos x - \cos x \sin^2 x)$ et

$\sin^4 x = \sin x\,(\sin x - \sin x \cos^2 x)$

b) Montre que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$ et

$J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$ *(On pourrait intégrer I et J par parties)*

2- a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$

b) Calculer $I - J$.

c) Déduire les valeurs de I et J.

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)^2 e^{-x}, \text{si } x \in [0; +\infty[\\ f(x) = x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 4, \text{ si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis en déduire deux asymptotes à (C) dont on précisera les équations.

2- a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 0[$,

$f(x) = x \ln|x - 2| - x \ln|x| + 4$.

b) Étudier la continuité de f en 0.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} (1 - \frac{2}{x})$ puis en déduire

$\lim\limits_{x \to 0^-} \ln(1 - \frac{2}{x})$.

d) Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$\frac{f(x) - f(0)}{x} = (x + 4)e^{-x} + 4\frac{e^{-x} - 1}{x}$

e) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultat obtenus .

3) Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

4- a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$

b) Déterminer le sens de variation de f' sur $]-\infty; 0[$ et dresser son tableau de variation sur $]-\infty; 0[$.

c) En déduire le signe de f' pour tout $x \in]-\infty; 0[$

d) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty; 0[$.

5) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

6) Construire la courbe (C).

7- a) Démontrer que $\forall x \in [0; +\infty[$

$f(x) = (2x + 4)e^{-x} - f'(x)$

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$I = \int_0^3 (2x + 4)e^{-x} dx$.

c) Calculer en cm² l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

On donne : $e^{-2} \approx 0{,}14$

BAC 2020 2nd tour

Exercice n°1

$(E): y' + 2y = 2x + 5$

1) Déterminons les réels a et b

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel , on a : $g'(x) = a$

Comme g est solution de (E) on a :

$$g'(x) + 2g(x) = 2x + 5 \Leftrightarrow a + 2(ax + b) = 2x + 5$$
$$\Leftrightarrow 2ax + (2b + a) = 2x + 5$$

Par identification $\begin{cases} 2a = 2 \\ a + 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

Donc $g(x) = x + 2$

2) Résolution de (E')

Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ke^{-2x}, k \in \mathbb{R}$

3-a) Démontrons que : f solution de $(E) \Leftrightarrow f - g$ solution de (E')

Supposons que f est solution de (E) et montrons que $(f - g)$ est solution de (E')

f est solution de $(E) \Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = 2x + 5$

Or g est solution de $(E) \Leftrightarrow g'(x) + 2g(x) = 2x + 5$

On en déduit que : $g'(x) + 2g(x) = f'(x) + 2f(x)$

Donc : $[f'(x) - g'(x)] + 2[f(x) - g(x)] = 0$

D'où $(f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0$

Par suite $(f - g)$ est solution de (E').

Supposons que $f - g$ est solution de (E') et montrons que f est solution de (E)

$f - g$ est solution de (E') signifie que :

$(f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0$

Donc : $f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x)$

Or $g'(x) + 2g(x) = 2x + 5 \Leftrightarrow$

$f'(x) + 2f(x) = 2x + 5$

D'où f est solution de (E)

En définitive, f est solution de $(E) \Leftrightarrow f - g$ est solution de (E').

b) Déduisons l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

$f - g$ étant solution de (E'), on a :

$f(x) - g(x) = Ae^{-2x}, A \in \mathbb{R}$ donc

$f(x) = g(x) + Ae^{-2x} = x + 2 + Ae^{-2x}$

c) Déterminons la solution h de (E) qui s'annule en 0

$f(0) = 0 \Leftrightarrow 2 + A = 0 \Leftrightarrow A = -2$

$\boxed{h(x) = x + 2 - 2e^{-2x}}$

Exercice n°2

$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$

1-a) Montrons que pour tout x:

$\cos^4 x = \cos x(\cos x - \cos x \sin^2 x)$ et

$\sin^4 x = \sin x(\sin x - \sin x \cos^2 x)$

- $\cos x(\cos x - \cos x \sin^2 x) = \cos^2 x(1 - \sin^2 x)$
$= \cos^2 x \times \cos^2 x = \cos^4 x$
- $\sin x(\sin x - \sin x \cos^2 x) = \sin^2 x(1 - \cos^2 x)$
$= \sin^2 x \times \sin^2 x = \sin^4 x$

b) Démonstration

$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx = \int_0^{\pi} [\cos x(\cos x - \cos x \sin^2 x)] dx$

Soit $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$

$u'(x) = -\sin x$ et $v(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$

$I = \left[\cos x\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)\right]_0^{\pi} +$
$\int_0^{\pi} \sin x\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right) dx$

$I = 0 + \int_0^{\pi} \left(\sin^2 x - \frac{1}{3}\sin^4 x\right) dx$

$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$

Donc $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$

$J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \int_0^{\pi} [\sin x(\sin x - \sin x \cos^2 x)] dx$

Soit $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = \sin x - \sin x \cos^2 x$

$u'(x) = \cos x$ et $v(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$

$J = \left[\sin x\left(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right)\right]_0^{\pi} +$
$\int_0^{\pi} \cos x\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right) dx$

$J = 0 + \int_0^{\pi} \left(\cos^2 x - \frac{1}{3}\cos^4 x\right) dx$

$J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$

Donc $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$.

2- a) Montrons que $I + J = \frac{3\pi}{4}$

$I + J = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J + \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$

$I + J = -\frac{1}{3}(I + J) + \int_0^{\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$

$I + J = -\frac{1}{3}(I + J) + \int_0^{\pi} dx = -\frac{1}{3}(I + J) + \pi$

D'où : $\frac{4}{3}(I + J) = \pi \Leftrightarrow I + J = \frac{3\pi}{4}$

Donc $\boxed{I + J = \frac{3\pi}{4}}$

b) Calculons $I - J$

$I - J = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J - \int_0^{\pi} \cos^2 x dx + \frac{1}{3}I$

$I - J = \frac{1}{3}(I - J) - \int_0^{\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

$I - J = \frac{1}{3}(I - J) - \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}(I - J) - 0$

D'où : $\frac{2}{3}(I - J) = 0 \Leftrightarrow \boxed{I - J = 0}$

c) Déduisons les valeurs de I et J

$\begin{cases} I + J = \frac{3\pi}{4} \\ I - J = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I = \frac{3\pi}{8}$ et $J = \frac{3\pi}{8}$

Problème

$\begin{cases} f(x) = (x + 2)^2 e^{-x}, \text{si } x \in [0; +\infty[\\ f(x) = x\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 4, \text{ si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$

1) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 4\right]$

Posons $X = -\frac{2}{x}$; $x = -\frac{2}{X}$ $x \to -\infty$, $X \to 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to 0} \left[-2\frac{\ln(X+1)}{X} + 4\right] = 2$

car $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$ $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [(x + 2)^2 e^{-x}]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 e^{-x} + 4xe^{-x} + 4e^{-x}) = 0$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0 \end{cases}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc l'axe (Ox) est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

2- a) Montrons que pour tout $x \in]-\infty; 0[$,

$f(x) = x\ln|x-2| - x\ln|x| + 4$

$x\ln|x-2| - x\ln|x| + 4 = x\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + 4$

$x\ln|x-2| - x\ln|x| + 4 = x\ln\left|1-\frac{2}{x}\right| + 4$

Pour tout $x < 0$, $-\frac{2}{x} > 0$ et $1-\frac{2}{x} > 0$

Donc $\left|1-\frac{2}{x}\right| = 1-\frac{2}{x}$

D'où $x\ln\left|1-\frac{2}{x}\right| + 4 = x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right) + 4 = f(x)$.

Ainsi, $\forall x \in]-\infty; 0[$, $f(x) = x\ln|x-2| - x\ln|x| + 4$

b) Étudions la continuité de f en 0

- $f(0) = (0+2)^2e^0 = 4$
- $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left[x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)+4\right]$

  $= \lim_{x\to0^-}[x\ln|x-2| - x\ln|x| + 4] = 4$

  car $\begin{cases}\lim_{x\to0}[x\ln|x-2|] = 0\times\ln 2 = 0\\ \lim_{x\to0}[x\ln|x|] = 0\end{cases}$
- $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}[(x+2)^2e^{-x}] = 4$
- $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$

  Donc f est continue en 0.

c) Calculons $\lim_{x\to0^-}(1-\frac{2}{x})$ puis déduisons $\lim_{x\to0^-}\ln(1-\frac{2}{x})$

$\lim_{x\to0^-}\left(1-\frac{2}{x}\right) = -\frac{2}{0^-} = +\infty$ donc $\lim_{x\to0^-}\ln(1-\frac{2}{x}) = +\infty$

d) Montrons que pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = (x+4)e^{-x} + 4\frac{e^{-x}-1}{x}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{(x+2)^2e^{-x}-4}{x} = \frac{x^2e^{-x}+4xe^{-x}+4e^{-x}-4}{x}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x(x+4)e^{-x}}{x} + \frac{4(e^{-x}-1)}{x} = (x+4)e^{-x} + 4\frac{e^{-x}-1}{x}$

Donc $\frac{f(x)-f(0)}{x} = (x+4)e^{-x} + 4\frac{e^{-x}-1}{x}$

e) Étudions la dérivabilité de f en 0

- $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{(x+2)^2e^{-x}-4}{x}$

  $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\left[(x+4)e^{-x} + 4\frac{e^{-x}-1}{x}\right] = 0$

  car $\lim_{x\to0^+}(x+4)e^{-x} = 4$ et $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x}-1}{x} = -1$
- $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)+4-4}{x} = \lim_{x\to0^-}\left(1-\frac{2}{x}\right)$

  $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

  Donc f n'est pas dérivable en 0

  Interprétation graphique du résultat

  (C) admet une demi- tangente horizontale d'équation $y = 3$, à droite en 0 et l'axe (Oy) comme demi-tangente verticale à gauche en 0.

3) Étudions le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$f'(x) = 2(x+2)e^{-x} - (x+2)^2e^{-x} = x(-x-2)e^{-x}$

$\forall x > 0, e^{-x} > 0$ et $-x-2 < 0$ donc

$x(-x-2)e^{-x} < 0$

Sur $]0; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

4-a) Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$

$\forall x \in]-\infty; 0[$ on a :

- $f'(x) = \ln(1-\frac{2}{x}) + x\left(\frac{\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}\right) = \ln(1-\frac{2}{x}) + \frac{2}{x-2}$
- $f''(x) = \frac{\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} - \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{2}{x(x-2)} - \frac{2}{(x-2)^2} = -\frac{4}{x(x-2)^2}$

b) Sens de variation de f' sur $]-\infty; 0[$

$\forall x < 0\ x(x-2)^2 < 0$ donc $-\frac{4}{x(x-2)^2} > 0$

On en déduit que $f''(x) > 0$. Par suite f' est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$

Tableau de variation de f'

x	$-\infty$	0
$f''(x)$	$+$	
$f'(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

c) $\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x)$ prend ses valeurs dans $]0; +\infty[$

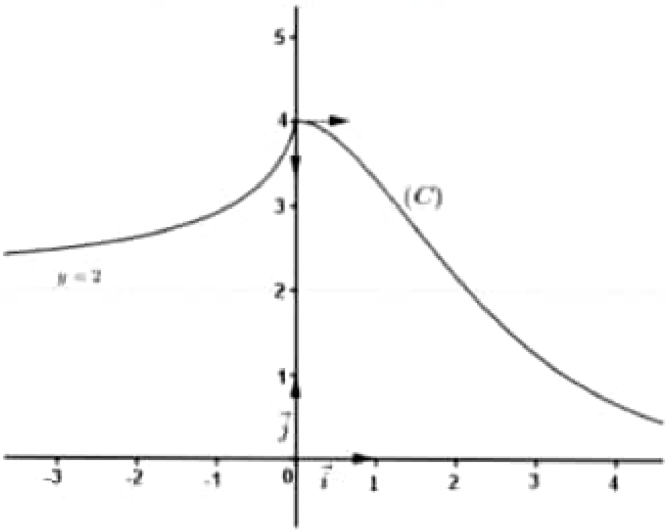
Donc $\forall x \in]-\infty; 0[$, $f'(x) > 0$

d) D'après ce qui précède, f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$.

5) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|0$	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

6) Construction de la courbe (C)



7-a) Démontrons que $\forall x \in [0; +\infty[$

$f(x) = (2x+4)e^{-x} - f'(x)$

$\forall x \in [0; +\infty[$, on a:

$f(x) = x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2xe^{-x} + 4e^{-x}$

$f(x) = (2x+4)e^{-x} + (x^2+2x)e^{-x}$

$f(x) = (2x+4)e^{-x} - (-x^2-2x)e^{-x}$

$f(x) = (2x+4)e^{-x} - f'(x)$

avec $f'(x) = (-x^2-2x)e^{-x}$

Donc $\forall x \in [0; +\infty[\qquad f(x) = (2x+4)e^{-x} - f'(x)$

b) Calculons I

$I = \int_0^3 (2x+4)e^{-x}dx$

Soit $u(x) = 2x+4 \qquad u'(x) = 2$

$\quad v'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = -e^{-x}$

$I = [-(2x+4)e^{-x}]_0^3 + 2\int_0^3 e^{-x}dx$

$I = [-(2x+4)e^{-x} - 2e^{-x}]_0^3$

$I = -10e^{-3} + 4 - 2e^{-3} + 2$

$\boxed{I = -12e^{-3} + 6}$

d) Calculons l'aire du domaine indiqué

Soit A, cette aire :

$A = \int_0^3 f(x)dx \times ua = 4\int_0^3 [(2x+4)e^{-x} - f'(x)]dx$

$A = 4\left[I - \int_0^3 f'(x)dx\right] = 4(6 - 12e^{-3} - [f(x)]_0^3)$

$A = 4(6 - 12e^{-3} - [(x+2)^2e^{-x}]_0^3)$

$A = -48e^{-3} + 24 - 100e^{-3} + 16$

$\boxed{A = 4(10 - 37e^{-3})cm^2}$

BAC 2020 1er tour

Exercice n°1

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_{n+1} = 4\frac{1+2u_n}{4-u_n}$ $et\ u_0 = -3$

1) Calculer $u_1;\ u_2\ et\ u_3$.

2) Montrer que la suite (u_n) est majorée par -2.

3. a) Déterminer le sens de variation de (u_n).

b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

4) Soit (V_n) la suite numérique définie par :

$V_n = \frac{1}{u_n+2}$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

En déduire u_n en fonction de n.

c) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$ en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice n°2

Le tableau suivant donne la distance de freinage nécessaire à une automobile circulant sur une route humide pour s'arrêter.

Vitesse de l'automobile x_i(km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance de freinage y_i(en m)	18	26	40	58	76	98	120	148	180	212

On considère l'ensemble des points M_i, de coordonnées $(x_i; y_i)$ où $1 \le i \le 10$.

1- a) Construire le nuage de points M_i
(1,5 cm représentera 20km/h en abscisse et 1,5 cm représentera 50m en ordonnées)

b) Un ajustement affine de ce nuage semble-t-il raisonnable ? Justifier la réponse.

2- a) Construire la droite (Δ) d'ajustement affine obtenue par la méthode de Mayer .
On prendra pour premier sous nuage les cinq premiers points et pour deuxième sous nuage les cinq derniers points.

b) Déterminer une équation de (Δ) sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont des réels à préciser.

3) En utilisant l'équation de (Δ), estimer :

a) La distance de freinage pour une vitesse de l'automobile de 150km/h.

b) La vitesse de l'automobile pour une distance de freinage de 250 m.

Problème

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2(x-1)\ln(1-x) \text{ si } x < 1 \\ f(x) = (x-2)e^{-x+1} + 1 \text{ si } x \ge 1 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Unité graphique 2 cm.

Partie A

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

2) Étudier la continuité de f en 1.

3) Étudier la dérivabilité de f en 1.
Interpréter graphiquement les résultats.

4) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5) Montrer que l'équation (E): $f(x) = -2$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

Partie B

1) Déterminer les réels α, β et γ tels que pour tout $x < 1$, $\frac{x^2-2x}{x-1} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1}$

2) Par une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_0^{1-\frac{1}{e}}(x-1)\ln(1-x)dx$.

3) Calculer en cm² l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1 - \frac{1}{e}$.

Partie C

1- a) Montrer que l'équation (E) équivaut à $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ par : $h(x) = 1 - e^{\frac{1}{1-x}}$

b) On pose $I = \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$. Montrer que pour x appartenant à I, $h(x)$ appartient à I.

c) Montrer que pour x appartenant à I, $|h'(x)| \le \frac{7}{8}$

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = h(u_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.

b) En utilisant l'inégalité de la moyenne, montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{7}{8}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

On donne : $\frac{2}{e} \approx 0,73$; $\frac{1}{e^2} \approx 0,13$; $\ln 2 \approx 0,69$;
$\ln\frac{3}{2} \approx 0,40$; $e^{\frac{2}{3}} \approx 1,947$; $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,648$

BAC 2020 1^er^ tour

Exercice n°1

1) Calculons u_1; u_2 et u_3

$u_1 = \frac{4(1+2u_0)}{4-u_0} = \frac{4(1-6)}{4+3} = -\frac{20}{7}$

$u_2 = \frac{4(1+2u_1)}{4-u_1} = \frac{4(1-\frac{40}{7})}{4+\frac{20}{7}} = -\frac{11}{4}$

$u_3 = \frac{4(1+2u_2)}{4-u_2} = \frac{4(1-\frac{11}{2})}{4+\frac{11}{4}} = -\frac{8}{3}$

2) Montrons que la suite (u_n) est majorée par -2

Démontrons par récurrence que $\forall n,\ u_n \leq -2$

On a : $u_0 = -3$ donc $u_0 \leq -2$

La proposition est vraie pour u_0

Supposons que $\forall n,\ u_n \leq -2$ et montrons que $u_{n+1} \leq -2$

$u_{n+1} + 2 = \frac{4+8u_n}{4-u_n} + 2 = \frac{6u_n+12}{4-u_n} = \frac{6(u_n+2)}{4-u_n}$

Or si $u_n < -2$ alors $u_n + 2 < 0$ et $4 - u_n > 0$ puis que $4 - u_n \geq 6$ donc $\frac{6(u_n+2)}{4-u_n} \leq 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} + 2 \leq 0$.

Par suite $u_{n+1} \leq -2$

Conclusion : $\forall n,\ u_n \leq -2$; la suite (u_n) est majorée par -2.

3- a) Déterminons le sens de variation de la suite (u_n)

$u_{n+1} - u_n = 4\frac{1+2u_n}{4-u_n} - u_n = \frac{u_n^2+4u_n+4}{4-u_n} = \frac{(u_n+2)^2}{4-u_n}$

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ puisque $(u_n+2)^2 \geq 0$ et $4 - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

b) (u_n) est croissante et majorée par -2 donc (u_n) est convergente.

4-a) Montons que (V_n) est une suite arithmétique

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{u_{n+1}+2} - \frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{\frac{4+8u_n}{4-u_n}+2} - \frac{1}{u_n+2}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{-2-u_n}{6(u_n+2)} = -\frac{1}{6}$

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{6}$

b) Exprimons V_n en fonction de n.

$V_n = V_0 + nr = -1 - \frac{n}{6} = -\frac{n+6}{6}$

$V_n = \frac{1}{u_n+2} \Leftrightarrow u_n = \frac{1-2V_n}{V_n} = \frac{1}{V_n} - 2 = -\frac{2n+18}{n+6}$

c) Calculons S_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

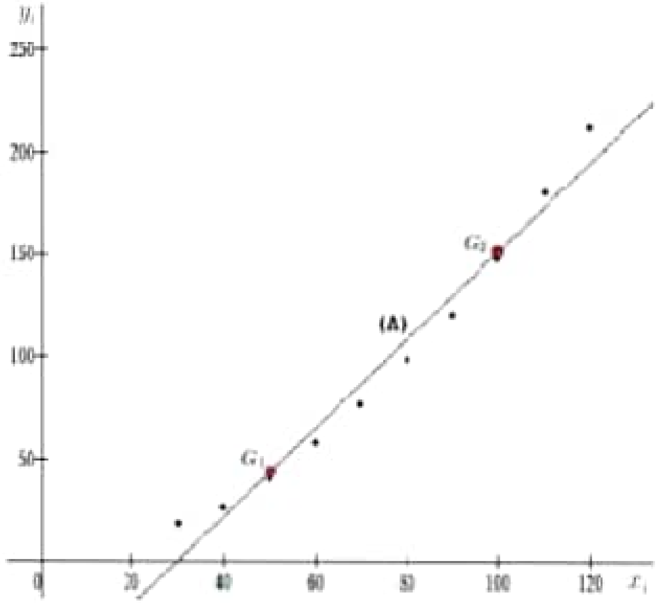
$S_n = \frac{(n+1)(V_0+V_n)}{2} = \frac{(n+1)(-1-\frac{n+6}{6})}{2} = -\frac{(n+1)(\frac{n+12}{6})}{2}$

$\boxed{S_n = -\frac{(n+1)(n+12)}{12}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\frac{(n+1)(n+12)}{12}\right] = -\infty$

Exercice n°2

1-a) Construction



b) Un ajustement affine semble raisonnable car l'ensemble des points du nuage semble rectiligne

2- a) Construction de la droite d'ajustement affine

Déterminons les coordonnées de G_1 et G_2, points moyens respectifs des deux nuages.

$\begin{cases} x_{G_1} = \frac{30+40+50+60+70}{5} = 50 \\ y_{G_1} = \frac{18+26+40+58+76}{5} = 43{,}6 \end{cases}$ $G_1(50;43{,}6)$

$\begin{cases} x_{G_2} = \frac{80+90+100+110+120}{5} = 100 \\ y_{G_2} = \frac{98+120+148+180+212}{5} = 151{,}6 \end{cases}$ $G_2(100;151{,}6)$

b) Déterminons une équation de (Δ) sous la forme $y = ax + b$

$\begin{cases} 50a + b = 43{,}6 \\ 100a + b = 151{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2{,}16$ *et* $b = -64{,}4$

$\boxed{(\Delta) : y = 2{,}16x - 64{,}4}$

3-a) Estimons la distance parcourue pour une vitesse de 150 km/h

$x = 150 \Leftrightarrow y = 2{,}16 \times 150 - 64{,}4 = 259{,}6.$

Pour vitesse de 150 km/ h, la distance de freinage est estimée à 259,6 m.

b) Estimons la vitesse de l'automobile pour une distance de freinage de 250 m

$y = 250 \Leftrightarrow x = \frac{250+64{,}4}{2{,}16} = 145{,}5$

Pour une distance de freinage de 250 m, la vitesse de l'automobile est estimée à 145,5 km/ h.

Problème

Partie A

1) Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [(x-2)e^{-x+1} + 1]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (exe^{-x} - 2ee^{-x} + 1) = 1$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [2(x-1)\ln(1-x)]$

Posons $X = 1 - x$; $x = 1 - X$ $\quad x \to -\infty$, $X \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} [-2X\ln X] = -\infty$ car

$\lim\limits_{X\to+\infty}(-2X) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X = +\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

2) <u>Étude de la continuité de f en 1</u>

- $f(1) = (1-2)e^{-1+1} + 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}[2(x-1)\ln(1-x)]$
  Posons $X = 1-x;\ x = 1-X \quad x\to1,\ X\to0$
  $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{X\to0}[-2X\ln X] = 0$
  car $\lim\limits_{X\to0}[X\ln X] = 0$
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}[(x-2)e^{-x+1} + 1] = 0$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$
  Donc f est continue en 1.

3) <u>Étude de la dérivabilité de f en 1</u>

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{2(x-1)\ln(1-x)}{x-1}$

Posons $X = 1-x;\ x = 1-X \quad x\to1^-,\ X\to0^+$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{X\to0^+}[2\ln X] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-2)e^{-x+1}+1}{x-1}$

Posons $X = 1-x;\ x = 1-X \quad x\to1,\ X\to0$

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{X\to0}\frac{(X+1)e^{X}-1}{X} = \lim\limits_{X\to0}\left(e^{X} + \frac{e^{X}-1}{X}\right) = 2$

Comme $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ alors f n'est pas dérivable en 1.

<u>Interprétation graphique du résultat.</u>

(C) admet une demi- tangente verticale à gauche en 1 , d'équation $x = 1$ et une demi- tangente à droite en 1 , de coefficient directeur 2.

4) <u>Études des variations de f et tableau de variation de f</u>

- f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et on a :
  $f'(x) = 2\ln(1-x) - \frac{2(x-1)}{1-x} = 2[\ln(1-x)+1]$
  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1-x)+1 > 0 \Leftrightarrow x < 1-\frac{1}{e}$
  Sur $\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right[$ $f'(x) > 0$ donc est strictement croissante sur $\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right[$
  Sur $\left]1-\frac{1}{e};+\infty\right[$ $f'(x) < 0$ donc est strictement décroissante sur $\left]1-\frac{1}{e};+\infty\right[$.
- f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et on a :
  $f'(x) = (3-x)e^{-x+1}$
  $\forall x \in]1;+\infty[\ e^{-x+1} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $3-x$.
  Sur $]1;3[$, $f'(x) > 0$ donc est strictement croissante sur $]1;3[$
  Sur $]3;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc est strictement décroissante sur $]3;+\infty[$.
  <u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		$1-\frac{1}{e}$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$ 2	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	1

5) <u>Montrons que (E) admet une solution unique</u>

Sur $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ est continue et strictement croissante.

Ainsi, réalise une bijection de $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ sur $f\left(\left[-1;-\frac{1}{2}\right]\right) = \left[-4\ln2;-3\ln\frac{3}{2}\right]$.

De plus, on a : $f(-1) = -4\ln2 \simeq -2{,}76$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3\ln\frac{3}{2} \simeq -1{,}21$

donc $-2 \in \left[-4\ln2;-3\ln\frac{3}{2}\right]$

En conclusion, l'équation (E) : $f(x) = -2$ admet sur $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ une unique solution α.

<u>Partie B</u>

1) Déterminons les réels $\alpha;\ \beta$ et γ

$\frac{x^2-2x}{x-1} = \frac{(x-1)^2-1}{x-1} = x-1-\frac{1}{x-1}$

Donc $\alpha = 1;\ \beta = \gamma = -1$

2) Calcul de l'intégrale I

$I = \int_0^{1-\frac{1}{e}}(x-1)\ln(1-x)dx$

Soit $u(x) = \ln(1-x)$ et $v'(x) = x-1$

$u'(x) = \frac{1}{x-1}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

$I = \left[\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln(1-x)\right]_0^{1-\frac{1}{e}} - \frac{1}{2}\int_0^{1-\frac{1}{e}}\frac{x^2-2x}{x-1}dx$

$I = \left[\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln(1-x)\right]_0^{1-\frac{1}{e}} - \frac{1}{2}\int_0^{1-\frac{1}{e}}(x-1-\frac{1}{x-1})dx$

$I = \left[\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln(1-x)\right]_0^{1-\frac{1}{e}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x - \ln|1-\right.$

$\left.x|\right]_0^{1-\frac{1}{e}}$

$I = -\frac{1}{2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2} + 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e^2})$

$\boxed{I = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}}$

3) Calculons l'aire de la partie du plan ainsi délimitée

$A = \int_0^{1-\frac{1}{e}} f(x)dx = \int_0^{1-\frac{1}{e}} 2(x-1)\ln(1-x)dx \times ua$

$A = 2\int_0^{1-\frac{1}{e}}(x-1)\ln(1-x)dx \times ua$ avec $ua = 4cm^2$

$A = 2I \times 4cm^2 = 8I\ cm^2 = 8\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}\right) = 2 - \frac{6}{e^2}\ \text{cm}^2$

$\boxed{A = \left(2-\frac{6}{e^2}\right)cm^2}$

<u>Partie C</u>

1- a) Montrons que l'équation (E) équivaut à $h(x) = x$

$f(x) = -2 \Leftrightarrow 2(x-1)\ln(1-x) = -2$

$\Leftrightarrow \ln(1-x) = -\frac{1}{x-1}$

$\Leftrightarrow x = 1 - e^{\frac{1}{1-x}}$ or $h(x) = 1 - e^{\frac{1}{1-x}}$

Donc l'équation (E): $f(x) = -2$ équivaut $h(x) = x$

b) Montrons que $\forall x \in I \Leftrightarrow h(x) \in I$

h est continue et dérivable sur $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ et

$h'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}}$

Sur $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ $-\frac{1}{(1-x)^2} < 0$ et $e^{\frac{1}{1-x}} > 0$ donc $h'(x) < 0$.

Il s'ensuit que est continue et strictement décroissante sur $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$

Pour tout élément de $h(I)$, on a :

$h(I) = \left[h\left(-\frac{1}{2}\right); h(-1)\right] = \left[1 - e^{\frac{2}{3}}; 1 - e^{\frac{1}{2}}\right]$ avec

$1 - e^{\frac{2}{3}} \simeq -0{,}947$ et $1 - e^{\frac{1}{2}} \simeq -0{,}648$.

Donc $[-0{,}947; -0{,}648] \subset I$ c'est-à-dire $h(I) \subset I$.

Ainsi $\forall x \in I \Leftrightarrow h(x) \in I$

c) Montrons que pour x appartenant à I, $|h'(x)| \leq \frac{7}{8}$

$\forall x \in I, h'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}}$

$x \in I \Leftrightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 \leq x - 1 \leq -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq (x-1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(x-1)^2} \leq \frac{4}{9}$ **(1)**

De plus, $x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq 1 - x \leq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1-x} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{1-x}} \leq e^{\frac{2}{3}}$ **(2)**

Par produit membre à membre des inégalités (1) et (2), on obtient :

$\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{1-x}} \leq \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}$

Comme $-\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}} \simeq -0{,}86$ et $-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}} \simeq -0{,}412$ alors :

$-0{,}86 \leq h'(x) \leq -0{,}41$ c'est-à-dire $|h'(x)| \leq 0{,}86 < \frac{7}{8}$

Donc pour x appartenant à I, $|h'(x)| \leq \frac{7}{8}$

2-a) <u>Montrons par récurrence que</u> $\forall n, u_n \in I$

On a : $u_0 = -1$ donc $u_0 \in I$. La proposition est vraie pour u_0.

Supposons que $\forall n, u_n \in I$ et montrons que $u_{n+1} \in I$

On sait que $\forall x \in I, h(x) \in I$.

Comme $u_n \in I$ alors $h(u_n) \in I$. Par suite $u_{n+1} \in I$ puisque $u_{n+1} = h(u_n)$.

<u>Conclusion</u> : $\forall n, u_n \in I$

b) <u>Montrons que $\forall n$,</u> $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{7}{8}|u_n - \alpha|$.

On a $\alpha \in I$ et $\forall n, u_n \in I$. De plus, $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{7}{8}$

D'après le théorème de l'inégalité de la moyenne on a :

$\left|\int_\alpha^{u_n} h'(x)dx\right| \leq \int_\alpha^{u_n} \frac{7}{8}dx \Leftrightarrow |h(u_n) - h(\alpha)| \leq \frac{7}{8}|u_n - \alpha|$ or $u_{n+1} = h(u_n)$ et $h(x) = x \Leftrightarrow h(\alpha) = \alpha$

Donc $\forall n, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{7}{8}|u_n - \alpha|$.

c) Déduisons que $\forall n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$

D'après ce qui précède, $\forall k, |u_{k+1} - \alpha| \leq \frac{7}{8}|u_k - \alpha|$

Pour $k = 0$, $|u_1 - \alpha| \leq \frac{7}{8}|u_0 - \alpha|$

Pour $k = 1$, $|u_2 - \alpha| \leq \frac{7}{8}|u_1 - \alpha|$

Pour $k = 2$, $|u_3 - \alpha| \leq \frac{7}{8}|u_2 - \alpha|$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Pour $k = n - 1$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{7}{8}|u_{n-1} - \alpha|$

Le produit membre à membre de ces n inégalités donne après simplification : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n |u_0 - \alpha|$

De plus, $-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq -\alpha \leq 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq u_0 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$

Donc $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$

Par suite $\forall n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$

d) <u>Convergence de la suite (u_n)</u>

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$ car $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$

$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

La suite (u_n) converge vers α

EXTRAIT BAC 2020 1er TOUR

Soit (u_n) la suite numérique définie par :
$u_{n+1} = 4\frac{1+2u_n}{4-u_n}$ $et\ u_0 = -3$

1) Calculer u_1; $u_2\ et\ u_3$.
2) Montrer que la suite (u_n) est majorée par -2.
3. a) Déterminer le sens de variation de (u_n).
b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
4) Soit (V_n) la suite numérique définie par :
$V_n = \frac{1}{u_n+2}$
a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
b) Exprimer V_n en fonction de n.
En déduire u_n en fonction de n.
c) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$ en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Proposition de correction

1) Calculons u_1; $u_2\ et\ u_3$

$u_1 = \frac{4(1+2u_0)}{4-u_0} = \frac{4(1-6)}{4+3} = -\frac{20}{7}$

$u_2 = \frac{4(1+2u_1)}{4-u_1} = \frac{4(1-\frac{40}{7})}{4+\frac{20}{7}} = -\frac{11}{4}$

$u_3 = \frac{4(1+2u_2)}{4-u_2} = \frac{4(1-\frac{11}{2})}{4+\frac{11}{4}} = -\frac{8}{3}$

2) Montrons que la suite (u_n) est majorée par -2
Démontrons par récurrence que $\forall n,\ u_n \leq -2$
On a : $u_0 = -3$ donc $u_0 \leq -2$

La proposition est vraie pour u_0
Supposons que $\forall n,\ u_n \leq -2$ et montrons que $u_{n+1} \leq -2$

$u_{n+1} + 2 = \frac{4+8u_n}{4-u_n} + 2 = \frac{6u_n+12}{4-u_n} = \frac{6(u_n+2)}{4-u_n}$

Or si $u_n \leq -2$ alors $u_n + 2 \leq 0$ et $4 - u_n > 0$ puis que $4 - u_n \geq 6$ donc $\frac{6(u_n+2)}{4-u_n} \leq 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} + 2 \leq 0$. Par suite $u_{n+1} \leq -2$
Conclusion : $\forall n,\ u_n \leq -2$; la suite (u_n) est majorée par -2.

3- a) Déterminons le sens de variation de la suite (u_n)

$u_{n+1} - u_n = 4\frac{1+2u_n}{4-u_n} - u_n = \frac{u_n^2+4u_n+4}{4-u_n} = \frac{(u_n+2)^2}{4-u_n}$

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ puisque $(u_n + 2)^2 \geq 0$ et $4 - u_n > 0$ Donc la suite (u_n) est croissante.

b) (u_n) est croissante et majorée par -2 donc (u_n) est convergente.

4-a) Montrons que (V_n) est une suite arithmétique

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{u_{n+1}+2} - \frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{\frac{4+8u_n}{4-u_n}+2} - \frac{1}{u_n+2}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{-2-u_n}{6(u_n+2)} = -\frac{1}{6}$

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{6}$

b) Exprimons V_n en fonction de n.

$V_n = V_0 + nr = -1 - \frac{n}{6} = -\frac{n+6}{6}$

$V_n = \frac{1}{u_n+2} \Leftrightarrow u_n = \frac{1-2V_n}{V_n} = \frac{1}{V_n} - 2 = -\frac{2n+18}{n+6}$

c) Calculons S_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$S_n = \frac{(n+1)(V_0+V_n)}{2} = \frac{(n+1)(-1-\frac{n+6}{6})}{2} = -\frac{(n+1)(\frac{n+12}{6})}{2}$

$\boxed{S_n = -\frac{(n+1)(n+12)}{12}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\frac{(n+1)(n+12)}{12}\right] = -\infty$

BAC 2020 2nd tour

Exercice n°1

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' + 2y = 2x + 5$.

On suppose que l'équation (E) admet une solution particulière g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ où a et b sont des réels à déterminer.

1) Déterminer les réels a et b.

2) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y' + 2y = 0$

3) On note f la solution de (E).

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E').

b) Déduire l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c) Déterminer la solution h de (E) qui s'annule en 0

Exercice n°2

Soient les intégrales I et J définies par :

$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$

1- a) Montrer que pour tout x:

$\cos^4 x = \cos x\,(\cos x - \cos x \sin^2 x)$ et

$\sin^4 x = \sin x\,(\sin x - \sin x \cos^2 x)$

b) Montre que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$ et

$J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$ *(On pourrait intégrer I et J par parties)*

2- a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$

b) Calculer $I - J$.

c) Déduire les valeurs de I et J.

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)^2 e^{-x}, \text{si } x \in [0; +\infty[\\ f(x) = x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 4, \text{ si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis en déduire deux asymptotes à (C) dont on précisera les équations.

2- a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 0[$,
$f(x) = x \ln|x - 2| - x \ln|x| + 4$.

b) Étudier la continuité de f en 0.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} (1 - \frac{2}{x})$ puis en déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} \ln(1 - \frac{2}{x})$.

d) Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$,
$\frac{f(x) - f(0)}{x} = (x+4)e^{-x} + 4\frac{e^{-x} - 1}{x}$

e) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultat obtenus .

3) Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

4- a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$

b) Déterminer le sens de variation de f' sur $]-\infty; 0[$ et dresser son tableau de variation sur $]-\infty; 0[$.

c) En déduire le signe de f' pour tout $x \in]-\infty; 0[$

d) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty; 0[$.

5) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

6) Construire la courbe (C).

7- a) Démontrer que $\forall x \in [0; +\infty[$
$f(x) = (2x + 4)e^{-x} - f'(x)$

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^3 (2x + 4)e^{-x} dx$.

c) Calculer en cm² l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

On donne : $e^{-2} \approx 0{,}14$

BAC 2021 2nd tour

Exercice n°1

On considère le nombre complexe u défini par :
$u = \frac{3-i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$

1) Montrer que $u = 1 - i$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système d'inconnues z_1 et z_2: $\begin{cases} iz_1 - z_2 = -1 + i \\ \frac{1}{2}z_1 + (1-i)z_2 = 2 - 5i \end{cases}$

3) Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = -2i$ et $z_B = 3 - i$.

On considère l'application f définie de $P\setminus\{A\}$ dans P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{iz-3i-1}{z+2i}$.

a) Soit C le point d'affixe u. Calculer l'affixe u' de C', image de C par f.

b) Montrer que $z' = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}$

c) Interpréter géométriquement le module et l'argument de z'.

d) Déduire de la question 3) c) les ensembles des points suivants :

- L'ensemble (E_1) tel que $z' \in \mathbb{R}^*$.
- L'ensemble (E_2) tel que $z' \in i\mathbb{R}^*$.
- L'ensemble (E_3) tel que $|z'| = 1$.

Exercice n°2

Un revendeur de billets de loterie dispose de dix billets dont trois sont gagnants. Une personne achète cinq billets. On supposera que tous les choix sont équiprobables.

1) Calculer la probabilité pour qu'il y ait parmi les cinq billets achetés :

a) Un seul billet gagnant.

b) au moins un billet gagnant.

2) Parmi les trois billets gagnants, un gagne 50 francs et deux gagnent 25 francs chacun.

Soit X la variable aléatoire égale au gain réalisé.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2cm.

Partie A

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = x + 1 - e^x$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2- a) Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation.

b) En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 3(x^2 + x)e^{-x}$.
Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Interpréter graphiquement les résultats des questions a) et b).

2- a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

3- a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse nulle.

b) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}\ f(x) - 3x = 3xe^{-x} \times h(x)$

c) Déduire les positions relatives de (C) et (T).

4) Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la tangente (T) et la courbe (C).

(On prendra : $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \approx -1{,}3$; $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 2{,}5$)

Partie C

1) Soit la fonction F définie par :
$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b et c sont des nombres réels.
Déterminer les réels a, b et c pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit α un réel strictement positif. Calculer, en cm², l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

3) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

On donne : $\sqrt{5} \approx 2{,}2$

BAC 2021 2nd tour

Exercice n°1

1) Montrons que $u = 1 - i$

$u = \frac{3-i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$

$u = \frac{(3-i)(2-i)}{5} + \frac{(-i)(2+i)}{1} - 3(-3-4i) - 2(5+5i)$

$u = 1 - i + 10 + 10i - 10 - 10i$

$u = 1 - i$

2) Résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système d'équations :

$\begin{cases} iz_1 - z_2 = -1 + i & \times (1-i) \\ \frac{1}{2}z_1 + (1-i)z_2 = 2 - 5i \end{cases}$

$\begin{cases} (1+i)z_1 - (1-i)z_2 = 2i \\ \frac{1}{2}z_1 + (1-i)z_2 = 2 - 5i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} + i\right) z_1 = 2 - 3i \Leftrightarrow z_1 = -2i$

On a : $iz_1 - z_2 = -1 + i \Leftrightarrow z_2 = 3 - i$

$\boxed{S_{\mathbb{C}^2} = \{(-2i; 3 - i)\}}$

3-a) Calculons l'affixe u' de C'

$u' = \frac{iu-3i-1}{u+2i} = \frac{i(1-i)-3i-1}{1-i+2i} = \frac{-2i}{1+i} = -1 - i$

$\boxed{u' = -1 - i}$

b) Montrons que $z' = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}$

On a : $\frac{i(z-3+i)}{z+2i} = \frac{iz-3i-1}{z+2i} = z'$ Donc $z' = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}$

c) Interprétons géométriquement le module et l'argument de z'

$|z'| = |i| \times \left|\frac{z-3+i}{z+2i}\right| = \left|\frac{z-z_B}{z-z_A}\right| = \frac{BM}{AM}$

$\arg(z') = \arg(i) + \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + (\overline{AM}; \overline{BM}) + 2k\pi$

d) Déduisons les ensembles de points :

- $z' \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z') = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

  $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + (\overline{AM}; \overline{BM}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

  $\Leftrightarrow (\overline{AM}; \overline{BM}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

  Donc (E_1) est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

- $z' \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

  $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + (\overline{AM}; \overline{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

  $\Leftrightarrow (\overline{AM}; \overline{BM}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

  Donc (E_2) est la droite (AB) privée des points A et B.

- $|z'| = 1 \Leftrightarrow AM = BM$

  Donc (E_3) est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice n°2

1) Calcul des probabilités

Soit Ω l'univers associé à cette épreuve.

$Card(\Omega) = C_{10}^5 = 252$

a) Probabilité d'avoir un seul billet gagnant :

$P = \frac{C_3^1 \times C_7^4}{Card(\Omega)} = \frac{105}{252} = \frac{5}{12}$

b) Probabilité d'avoir au moins un billet gagnant :

$P = 1 - \frac{C_3^0 \times C_7^5}{252} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

2-a) $X(\Omega) = \{0; 25; 50; 75; 100\}$

b) Loi de probabilité de X

$P(X = 0) = \frac{C_7^5}{252} = \frac{1}{12}$

$P(X = 25) = \frac{C_2^1 \times C_7^4}{252} = \frac{5}{18}$

$P(X = 50) = \frac{C_1^1 \times C_7^4 + C_2^2 \times C_7^3}{252} = \frac{5}{18}$

$P(X = 75) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_7^3}{252} = \frac{5}{18}$

$P(X = 100) = \frac{C_1^1 \times C_2^2 \times C_7^2}{252} = \frac{1}{12}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x	0	25	50	75	100
$P(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{12}$

c) Espérance mathématique de X

$E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 25 \times \frac{5}{18} + 50 \times \frac{5}{18} + 75 \times \frac{5}{18} + \frac{100}{12}$

$E(X) = \frac{900}{18} = 50$

Problème

Partie A

$h(x) = x + 1 - e^x$

1) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 - e^x = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 - e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x} = -\infty \end{cases}$

2-a) Sens de variation de h et tableau de variation

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 1 - e^x$

$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

$\forall x \in]-\infty; 0]$, $h'(x) \geq 0$ donc h est croissante sur $]-\infty; 0]$

$\forall x \in [0; +\infty[$, $h'(x) \leq 0$ donc h est décroissante sur $[0; +\infty[$

Tableau de variation de h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

b) Signe de $h(x)$

h est croissante sur $]-\infty; 0]$ puis décroissante sur $[0; +\infty[$ donc h admet un maximum au point d'abscisse 0 sur $\mathbb{R}$. D'où $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \leq h(0) \Leftrightarrow h(x) \leq 0$

Par suite $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \leq 0$.

Partie B

$f(x) = 3(x^2 + x)e^{-x}$

1- a) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2e^{-x} + 3xe^{-x}) = 0$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3xe^{-x} = 0 \end{cases}$

b) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3(x^2 + x)e^{-x} = +\infty$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} x^2 + x = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3(x^2+x)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3(x+1)e^{-x} = -\infty$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$ car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} x+1 = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

c) Interprétons ces résultats

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2-a) Calcul de $f'(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3[(2x+1)e^{-x} - (x^2+x)e^{-x}]$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = 3(-x^2+x+1)e^{-x}}$

b) Signe de $f'(x)$ et tableau de variation de f

On a : $f'(x) = 3(-x^2+x+1)e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ donc le signe de f dépend de celui de $-x^2+x+1$.

$-x^2+x+1 = 0 \quad \Delta = 5 \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\forall x \in \left]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[, f'(x) \le 0$

$\forall x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right], f'(x) \ge 0$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	↗	$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	↘	0

3-a) Equation de la tangente (T) à (C) en $x_0 = 0$

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$

Donc : $\boxed{(T): y = 3x}$

b) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) - 3x = 3xe^{-x} \times h(x)$

$f(x) - 3x = 3(x^2+x)e^{-x} - 3x$

$f(x) - 3x = 3xe^{-x}\left(x + 1 - \frac{1}{e^{-x}}\right)$

$f(x) - 3x = 3xe^{-x}(x + 1 - e^{x})$ or $h(x) = x + 1 - e^{x}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - 3x = 3xe^{-x} \times h(x)$.

c) Positions relatives de (C) et (T)

$f(x) - 3x = 3xe^{-x} \times h(x)$

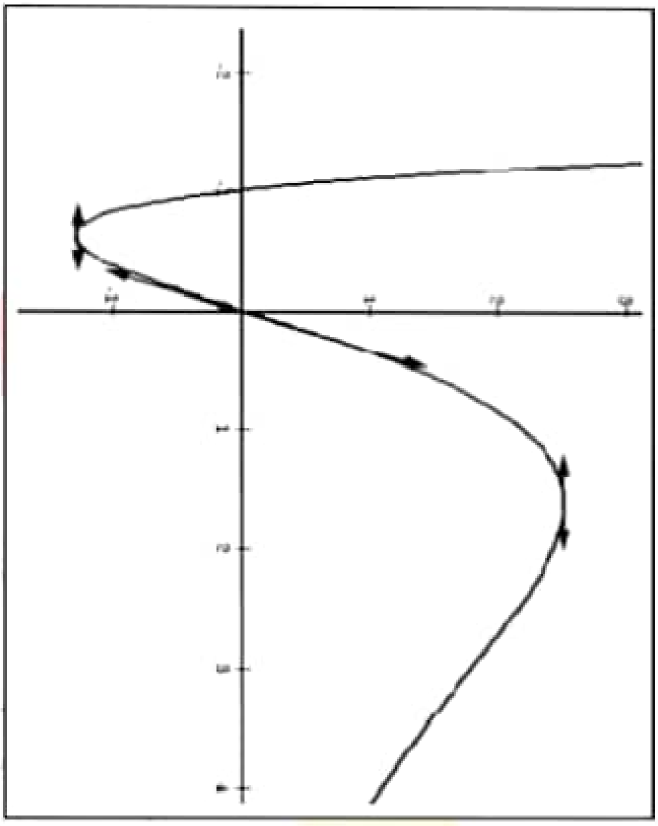
$\forall x \in \mathbb{R}\ e^{-x} > 0$ donc le signe de $f(x) - 3x$ dépend de

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$3x$		-	0	+	
$h(x)$		-	0	-	
$3x \times h(x)$		+	0	-	

$\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) - 3x > 0$ donc (C) est au-dessus de (T) sur $]-\infty; 0[$.

$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - 3x < 0$ donc (C) est en dessous de (T) sur $]0; +\infty[$.

4) Traçons (T) et (C).



<u>Partie C</u>

1) $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

Déterminons les réels a, b et c pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Si F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

$F'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$

Par identification on a : $\begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \\ c = -9 \end{cases}$

D'où $\boxed{F(x) = (-3x^2 - 9x - 9)e^{-x}}$

2) Calculons, en cm², l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$

$\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)dx \times ua = [F(x)]_0^{\alpha} = F(\alpha) - F(0)$

$\mathcal{A}(\alpha) = [(-3\alpha^2 - 9\alpha - 9)e^{-\alpha} + 9]4\ cm^2$

3) Calculons $\lim_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

$\lim_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} 4[(-3\alpha^2 - 9\alpha - 9)e^{-\alpha} + 9]$

$\lim_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} 4[-3\alpha^2e^{-\alpha} - 9\alpha e^{-\alpha} - 9e^{-\alpha} + 9]$

$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 36\ cm^2}$

BAC NIGER 2017

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ **par :**

$g(x) = 2x^2 + \ln x$

1) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2-a) Montrer que $g(x) = 0$ **admet une et une solution** α **sur** $]0;+\infty[$

b) Montrer que $0,548 < \alpha < 0,549$

c) Préciser le signe de $g(x)$ **selon les valeurs de** x.

Partie B

Soit f **la fonction définie sur** $]0;+\infty[$ **par :**

$f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{2x}$

1- a) Déterminer la limite de f en 0.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite $(D): y = 1 - x$ **est asymptote à** (C_f).

Etudier la position de (C_f) **par rapport à** (D).

2-a) Calculer $f'(x)$ **et montrer que :** $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3- a) Montrer que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$

b) Donner alors un encadrement de $f(\alpha)$ **à** 10^{-2} **près.** **4-**

a) Calculer les coordonnées du point de (C_f) **où la tangente est parallèle à** (D).

Donner une équation de cette tangente (T).

b) Tracer $(C_f), (D)$ *et* (T) **dans un repère** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **unité graphique : 4cm.**

c) Soit λ **un réel supérieur à** $\frac{1}{e}$.

Déterminer l'aire $A(\lambda)$ **de la partie du plan compris entre** $(C_f), (D)$ **et les droites d'équation** $x = \frac{1}{e}$ **et** $x = \lambda$.

Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

Proposition de corrigé

Partie A

$g(x) = 2x^2 + \ln x$

1) Sens de variations de g

g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[\ g'(x) = (2x^2 + \ln x)' = 4x + \frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{4x^2+1}{x}$

$\forall x \in]0;+\infty[\ g'(x) > 0$. **Donc g est strictement croissante sur** $]0;+\infty[$.

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2-a) g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ **donc elle réalise une bijection de** $]0;+\infty[$ **vers** $g(\,]0;+\infty[\,) =]-\infty;+\infty[$.
De plus $0 \in]-\infty;+\infty[$ **d'où l'équation** $g(x) = 0$ **admet une et une solution** α **sur** $]0;+\infty[$

b) **Montrons que** $0,548 < \alpha < 0,549$
$g(0,548) = 2 \times (0,548)^2 + ln(0,548) = -8,7.10^{-4}$
$g(0,549) = 2 \times (0,549)^2 + ln(0,549) = 3,1.10^{-3}$
$g(0,548) \times g(0,549) < 0$
Donc $0,548 < \alpha < 0,549$

c) Signe de $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$-$ $\nearrow$	0	$+$ $\nearrow$	$+\infty$
signe		$-$		$+$	

$\forall x \in]0;\alpha]\ , g(x) \leq 0$
$\forall x \in [\alpha;+\infty[\ , g(x) \geq 0$

Partie B

$f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{2x}$

1- a) Déterminons la limite de f en 0.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[1 - x + \frac{1}{2x}(1 + \ln x)\right] = -\infty$

Interprétation

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ (oy) est une asymptote verticale à (C_f) en $-\infty$.

b) Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[1 - x + \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{2x}\right] = -\infty$$

c) Montrons que la droite (D): $y = 1 - x$ est asymptote à (C_f).

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} \left[1 - x + \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{2x} - 1 + x\right]$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{2x}\right] = 0$$

Donc la droite (D): $y = 1 - x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

Positions relatives

$f(x) - y = \frac{1+\ln x}{2x}$

$\forall x \in]0;+\infty[, 2x > 0 \quad 1 + \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$

- $\forall x \in \left]0;e^{-1}\right]$ $f(x) - y \leq 0$ donc (C_f) est en dessous de (D) sur $\left]0;e^{-1}\right]$
- $\forall x \in \left[e^{-1};+\infty\right[$ $f(x) - y \geq 0$ donc (C_f) est au-dessus de (D) sur $\left]0;e^{-1}\right]$

2-a) Calculons $f'(x)$ et montrons que : $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$

f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[$ $f'(x) = \left(1 - x + \frac{1+\ln x}{2x}\right)'$

$f'(x) = -1 + \frac{\frac{1}{x}\times 2x - 2(1+\ln x)}{(2x)^2} = -1 + \frac{1-1-\ln x}{2x^2}$

$f'(x) = \frac{-2x^2-\ln x}{2x^2} = \frac{-(2x^2+\ln x)}{2x^2} = -\frac{g(x)}{2x^2}$

b) Dressons le tableau de variation de f.

- $\forall x \in]0;\alpha]$ $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $]0;\alpha]$
- $\forall x \in [0;+\infty[$ $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $]0;\alpha]$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3- a) Montrons que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$

On sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + \ln(\alpha) = 0$

Donc $\ln(\alpha) = -2\alpha^2$

$f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1+\ln\alpha}{2\alpha} = 1 - \alpha + \frac{1}{2\alpha} - \frac{2\alpha^2}{2\alpha}$

D'où $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$

b) **Encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.**

$0,548 < \alpha < 0,549 \Leftrightarrow -1,098 < -2\alpha < -1,096$
$\Leftrightarrow -0,098 < 1 - 2\alpha < -0,096$

$0,548 < \alpha < 0,549 \Leftrightarrow 1,096 < 2\alpha < 1,098$
$\Leftrightarrow 0,910 < \frac{1}{2\alpha} < 0,912$

Donc $0,812 < 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha} < 0,816$

D'où $0,81 < f(\alpha) < 0,82$

4-a) Calculons les coordonnées du point de (C_f) où la tangente est parallèle à (D).

(T): $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $a \in]0;+\infty[$

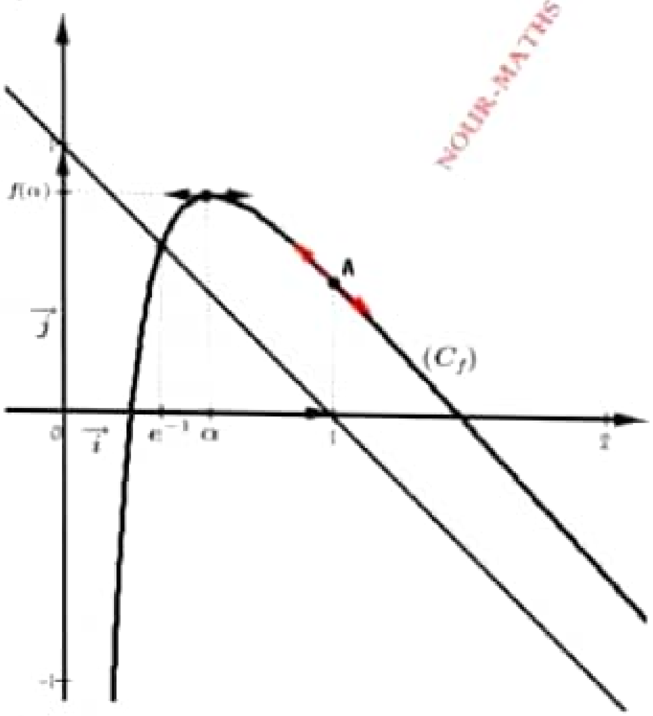
$(T) \parallel (D) \Leftrightarrow f'(a) = -1 \Leftrightarrow \frac{-2a^2-\ln a}{2a^2} = -1$
$\Leftrightarrow -2a^2 - \ln a = -2a^2 \Leftrightarrow \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

$f(1) = \frac{1}{2}$ **Donc ce point est** $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

(T): $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -x + 1 + \frac{1}{2}$

(T): $y = -x + \frac{3}{2}$

b) Tracé de la courbe



c) Déterminons l'aire $A(\lambda)$

$A(\lambda) = \left(\int_{\frac{1}{e}}^{\lambda} (f(x) - y)dx\right) \times u.a$

$A(\lambda) = 16 \int_{\frac{1}{e}}^{\lambda} (\frac{1+\ln x}{2x})dx) = 8 \int_{\frac{1}{e}}^{\lambda} (\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \ln x)dx$

$A(\lambda) = 8\left[\ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x\right]_{\frac{1}{e}}^{\lambda} = 8(\ln\lambda + \frac{1}{2}\ln^2\lambda - \frac{1}{2})\text{cm}^2$

$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = +\infty$

BAC 2021 1er tour

Exercice n°1

1) Résoudre l'équation différentielle
$(E): 2y' + y = 0$.

2) On considère l'équation différentielle
$(E'): 2y' + y = (x+2)e^{\frac{-1}{2}x}$
Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie par $f(x) = (ax^2 + bx)e^{\frac{-1}{2}x}$ soit solution de (E').

3) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E).

4) Déduire de ce qui précède la solution de l'équation (E').

Exercice n°2

On définit pour tout entier naturel n, les suites (u_n) et (v_n) respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n)^2 \end{cases} \text{ et } v_n = \ln\left(\frac{2}{3}u_n\right)$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n > 0$.

2- a) Calculer v_0.

b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

4) On pose : $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S' = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$

a) Calculer S en fonction de n.

b) Prouver que $S' = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} e^S$ puis exprimer S' en fonction de n.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 1cm. On considère la fonction f définie par : $f(x) = (2x+3)e^{-x} + x - 1$.
On note (C) la courbe représentative de f.

Partie A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = e^x - 2x - 1$.

1) Etudier le sens de variation de h.

2-a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions 0 *et* α.

b) Montrer que $\alpha \in]1; 2[$.

3) Préciser le signe de $h(x)$ en fonction de x.

Partie B

1) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Calculer $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3-a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = e^{-x}h(x)$, h étant la fonction définie dans la partie A.
(*Indication* : $1 = e^{-x} \times e^x, \forall x \in \mathbb{R}$)

b) En déduire le sens de variation de f.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5- a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C).

b) Etudier les position relative de (C) par rapport à (Δ).

c) Calculer les coordonnées du point A, intersection de (C) et (Δ).

6) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe (C).

Partie C

Soit D la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées, la droite (Δ), la courbe (C) et la droite d'équation $x = 2$.
A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire de D en cm^2.
On donne : $e \approx 2{,}72$; $\ln 2 \approx 0{,}69$

BAC 2021 1er tour

Exercice n°1

1) Résolution de l'équation (E)

On a : $2y' + y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{2}y = 0$

D'où $h(x) = ke^{-\frac{1}{2}x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2) Détermination de a et b

$f(x) = (ax^2 + bx)e^{\frac{-1}{2}x}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (-\frac{1}{2}ax^2 + 2ax - \frac{1}{2}bx + b)e^{\frac{-1}{2}x}$

f est solution de $(E') \Leftrightarrow 2f' + f = (x+2)e^{\frac{-1}{2}x}$

$(-ax^2 + 4ax - bx + 2b + ax^2 + bx)e^{\frac{-1}{2}x} = (x + 2)e^{\frac{-1}{2}x} \Leftrightarrow 4ax + 2b = x + 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$ et $b = 1$

Donc $\boxed{f(x) = (\frac{1}{4}x^2 + x)e^{\frac{-1}{2}x}}$.

3) Démontrons que : g solution de $(E') \Leftrightarrow g - f$ solution de (E)

Supposons que g est solution de (E') et montrons que $(g - f)$ est solution de (E)

g est solution de $(E') \Leftrightarrow 2g'(x) + g(x) = (x+2)e^{\frac{-1}{2}x}$

Or f est solution de $(E') \Leftrightarrow 2f' + f = (x+2)e^{\frac{-1}{2}x}$

On en déduit que : $2g'(x) + g(x) = 2f'(x) + f(x)$

Donc : $2[g'(x) - f'(x)] + g(x) - f(x) = 0$

D'où $2(g - f)'(x) + (g - f)(x) = 0$

Par suite $(g - f)$ est solution de (E).

Supposons que $g - f$ est solution de (E) et montrons que g est solution de (E')

$g - f$ est solution de (E) signifie que :

$2(g - f)'(x) + (g - f)(x) = 0$

Donc : $2g'(x) + g(x) = 2f'(x) + f(x)$

Or $2f'(x) + f(x) = (x+2)e^{\frac{-1}{2}x} \Leftrightarrow$

$2g'(x) + g(x) = (x+2)e^{\frac{-1}{2}x}$

D'où g est solution de (E')

En définitive, g est solution de $(E') \Leftrightarrow g - f$ est solution de (E).

4) Solution de (E')

D'après ce qui précède :

$g(x) - f(x) = h(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x) + h(x)$

$\boxed{g(x) = (\frac{1}{4}x^2 + x + k)e^{\frac{-1}{2}x}}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice n°2

$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n)^2 \end{cases}$ et $v_n = \ln(\frac{2}{3}u_n)$

1) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$

Posons P_n : « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ »

On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ donc P_0 est vraie.

Supposons que P_n soit vraie et montrons que P_{n+1} : « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > 0$ » est aussi vraie.

Par hypothèse de récurrence :

$u_n > 0 \Leftrightarrow u_n^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}u_n^2 > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > 0$

Donc P_{n+1} est vraie. D'où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

2- a) Calculons v_0

$v_0 = \ln\left(\frac{2}{3}u_0\right) = \ln(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}) = -\ln 3$ $\boxed{v_0 = -\ln 3}$

b) Démontrons que (v_n) est une suite géométrique de raison 2

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ln\left(\frac{2}{3}u_{n+1}\right) = \ln\left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}(u_n)^2\right)$

$v_{n+1} = \ln\left[\left(\frac{2}{3}u_n\right)^2\right] = 2\ln\left(\frac{2}{3}u_n\right)$ or $v_n = \ln\left(\frac{2}{3}u_n\right)$

Donc $v_{n+1} = 2v_n$.

Par suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -\ln 3$.

3) Exprimons v_n puis u_n en fonction de n

$v_n = v_0 q^n = -2^n \ln 3$

$v_n = \ln\left(\frac{2}{3}u_n\right) \Leftrightarrow \frac{2}{3}u_n = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2}e^{v_n} = \frac{3}{2}e^{-2^n \ln 3}$

$\boxed{v_n = -2^n \ln 3 \ \text{ et } \ u_n = \frac{3}{2}e^{-2^n \ln 3}}$

4- a) Calculons S

$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -\ln 3\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

$S = (1 - 2^{n+1})\ln 3$

b) Calculons S'

$S' = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = \frac{3}{2}e^{v_0} \times \frac{3}{2}e^{v_1} \times \ldots \times \frac{3}{2}e^{v_n}$

$S' = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} e^{v_0+v_1+\cdots+v_n}$ D'où : $S' = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} e^S$

$S' = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} e^{(1-2^{n+1})\ln 3}$

Problème

Partie A

$h(x) = e^x - 2x - 1$.

1) Etudions le sens de variation de h.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x - 2$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln 2[$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in]\ln 2; +\infty[$

$\forall x \in]-\infty; \ln 2[$, $h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2[$.

$\forall x \in]\ln 2; +\infty[$, $h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]\ln 2; +\infty[$.

2-a) Montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions 0 et α

On a : $h(0) = e^0 - 2 \times 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Donc 0 est une solution de l'équation $h(x) = 0$ dans $]-\infty; \ln 2[$

Aussi h est continue et strictement croissante sur $]\ln 2; +\infty[$. Donc h réalise une bijection de $]\ln 2; +\infty[$ vers $h(\,]\ln 2; +\infty[\,) =]h(\ln 2); +\infty[$

$h(\ln 2) = 1 - 2\ln 2 \approx -0{,}38 < 0$

$0 \in]h(\ln 2); +\infty[$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $]\ln 2; +\infty[$.

b) Montrons que $\alpha \in]1; 2[$

h est continue et strictement croissante sur $]1; 2[\subset]\ln 2; +\infty[$.

De plus, $h(1) = e - 3 < 0$ et $h(2) = e^2 - 5 > 0$

$h(1) \times h(2) < 0$ donc $\alpha \in]1; 2[$

3) Signe de $h(x)$

h est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2[$ et $h(0) = 0$

- $\forall x \in]-\infty; 0[\quad h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$
- $\forall x \in]0; \ln 2[\quad h(x) < h(0) \Leftrightarrow h(x) < 0$

h est strictement croissante sur $]\ln 2\,; +\infty[$ et $h(\alpha) = 0$

- $\forall x \in]\ln 2\,; \alpha[\quad h(x) < h(\alpha) \Leftrightarrow h(x) < 0$
- $\forall x \in]\alpha; +\infty[\quad h(x) > h(\alpha) \Leftrightarrow h(x) > 0$

En résumé :

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[\ ,\ h(x) > 0$

$\forall x \in]0; \alpha[\ ,\ h(x) < 0$

Partie B

1) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [(2x+3)e^{-x} + x - 1] = -\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+3)e^{-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{2x}{e^x} + \frac{3}{e^x} + x - 1\right] = +\infty$

2) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$ puis interprétons graphiquement le résultat obtenu

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x+3}{x}e^{-x} + \frac{x-1}{x}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{2x+3}{x}e^{-x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (oy) en $-\infty$.

3-a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}h(x)$

f est dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{-x} - (2x+3)e^{-x} + 1$

$f'(x) = (2 - 2x - 3)e^{-x} + e^{-x} \times e^{x}$

$f'(x) = e^{-x}(e^{-x} - 2x - 1) = e^{-x}h(x)$

D'où $f'(x) = e^{-x}h(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) Déduisons le sens de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}h(x)$ or $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ et $h(x)$ ont le même signe.

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[\ ,\ f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]\alpha; +\infty[$

$\forall x \in]0; \alpha[\ ,\ f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$.

4) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5- a) Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C)

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - y = (2x+3)e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{e^x} + \frac{3}{e^x}\right) = 0$

Donc la droite (Δ): $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$

b) Position relative de (C) et (Δ)

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - y = (2x+3)e^{-x}$

$\forall x \in \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$, $f(x) - y > 0$ donc (C) est au-dessus de (Δ)

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$, $f(x) - y < 0$ donc (C) est en dessous de (Δ).

c) Coordonnées du point A

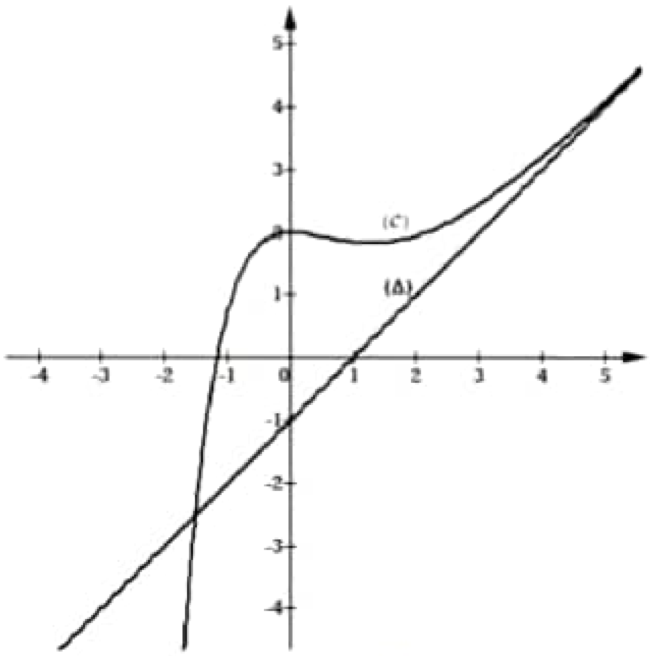
$f(x) = y \Leftrightarrow (2x+3)e^{-x} + x - 1 = x - 1$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = 0$

d'où $x = -\frac{3}{2}$ et $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$

Donc $A(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2})$

6) Traçons la droite (Δ) et la courbe (C).



Partie C

Calculons l'aire de D

Soit S cette aire.

$S = \int_0^2 [f(x) - (x-1)]dx\ cm^2$

$S = \int_0^2 [(2x+3)e^{-x}]dx\ cm^2$

Soit $u(x) = 2x + 3 \qquad u'(x) = 2$

$v'(x) = e^{-x} \qquad v(x) = -e^{-x}$

$S = [-(2x+3)e^{-x}]_0^2 + 2\int_0^2 e^{-x}dx$

$S = [-(2x+3)e^{-x} - 2e^{-x}]_0^2$

$S = 5 - 9e^{-2}\ cm^2$