BAC SE 2023 GUINEE

Exercice 1

Soit (u_n) une suite dans l'ensemble des nombres complexes définie par son premier terme u_0 et par la relation (E): $\forall n \in \mathbb{N}; (1+i)u_{n+1} = u_n + 1 + i$

1) On pose $u_0 = 1 - i$

Calculer u_1 et u_2 puis en déduire u_n.

Que peut-on conclure pour la suite (u_n).

2) On suppose $u_0 = 2 - i$ et (w_n) la suite définie par : $w_n = u_n + \alpha$.

a) Déterminer α pour que (w_n) soit une suite géométrique.

b) Exprimer w_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} + w_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$.

Exercice 2

Dans une population vulnérable, la probabilité pour qu'une personne quelconque contracte une maladie au cour d'une année est de 0,4 pour une maladie M et 0,6 pour une maladie M'.

« Contracter la maladie M » et « Contracter la maladie M'» sont deux évènements indépendants.

Pour une personne choisie au hasard, calculer la probabilité des évènements suivants :

1) A : « Contracter les deux maladies $M\ et\ M'$ »

2) B : « Contracter au moins une de ces deux maladies au cours de la même année ».

3) C : « ne contracter aucune de ces deux maladies au cours de la même année ».

Problème

Soit la fonction f définie par : $f(x) = (2xe^x)^2$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plans muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (unité : 2cm)

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Déterminer les limites de f sur D_f.

3) Montrer que $\forall x \in D_f, f'(x) = 8xe^{2x}(1+x)$.

En déduire le sens de variation de f.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Déterminer l'équation de la tangente T_K au point K d'abscisse $\frac{1}{2}$.

6) Tracer la courbe (C_f) et la tangente T_K.

7) Soit λ un réel appartenant à $]-2;-1[$.

a) Calculer, en cm² l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par l'axe (OI), les droites d'équations $x = \lambda$, $x = 0$ et la courbe (C_f).

b) Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers -1.

BAC D 2023 NIGER

Exercice 1

1) Soit a un nombre complexe différent de $1\ et -1$.

On considère l'équation (E): $z^2 - (a + a^2)z + a^3 = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

2) Soient les points A, B et C les points d'affixes respectives $1, a^2$ et a.

Montrer que le triangle ABC est :

a) isocèle en C si et seulement si $|a| = 1$

b) isocèle en B si et seulement si $|a| = |a+1|$

c) isocèle en A si et seulement si $|a+1| = 1$

d) équilatéral si et seulement si $|a| = |a+1| = 1$

3) Soit θ un réel de l'intervalle $]0;\pi[$ et on prend $a = \cos\theta + i\sin\theta$

a) Déterminer en fonction de θ le module et un argument du complexe $1 + a$.

b) Justifier que le triangle ABC est isocèle pour toute valeur θ de $]0;\pi[$.

c) Déterminer la valeur de θ pour que le triangle ABC soit équilatéral.

Exercice 2

L'évolution de l'hydrolyse d'un produit chimique au cours du temps t (en minutes) est décrite par l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

(E): $y'(t) = k\big(a - y(t)\big)$ où $y(t)$ est la proportion hydrolysée au temps t, $a\ et\ k$ sont constantes.

1) En posant $f = a - y$, justifier que (E) s'écrit : (E_1): $f' = -kf$

2) Résoudre (E_1) et en déduire la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

3) Calculer les valeurs de $a\ et\ k$ telles que $y(45) = 0{,}147$ et $y(90) = 0{,}274$

4) Calculer la proportion hydrolysée au bout de 130 mn

Problème

Partie A

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \frac{x+2}{x+1} - 2\ln(x+1)$

1) Déterminer le domaine de définition de g, puis les limites de g aux bornes de son domaine de définition.

2) Calculer $g'(x)$

3) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;1{,}1[$.

5) Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = x^2(1 - \ln(x+1))$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1;+\infty[$.

2-a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $\forall x \in]-1;+\infty[$ $f'(x) = xg(x)$.

b) En déduire le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{2\alpha+2}$.

4) Déterminer le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

5) Préciser les branches infinies de courbe (C).

6) En prenant $\alpha = 1{,}09$ tracer (C).

Partie C

On note h la restriction de f à l'intervalle $]-1; 0[$.

1) Montrer que h réalise une bijection de $]-1; 0[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Donner le tableau de variation de sa bijection réciproque h^{-1}.

3) Préciser la branche infinie de la courbe représentative de h^{-1}.

4) Tracer la courbe représentation de h^{-1} dans le même repère que celui de (C).

PROPOSITION DE CORRECTION

BAC SE 2023 GUINEE

Exercice 1

(E): $\forall n \in \mathbb{N}; (1+i)u_{n+1} = u_n + 1 + i$

1) $u_0 = 1 - i$

Calculons u_1 et u_2 puis déduisons u_n

$(1+i)u_1 = u_0 + 1 + i = 1 - i + 1 + i = 2$

$(1+i)u_1 = 2 \Leftrightarrow u_1 = \frac{2}{1+i} = 1 - i$

$(1+i)u_2 = u_1 + 1 + i = 1 - i + 1 + i = 2$

$(1+i)u_2 = 2 \Leftrightarrow u_2 = \frac{2}{1+i} = 1 - i$

On en déduit que $u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_2 = 1 - i$

On conclut que la suite (u_n) est constante.

2) $u_0 = 2 - i$ et $w_n = u_n + \alpha$

a) Déterminons α pour que (w_n) soit une suite géométrique.

(w_n) est une suite géométrique $\Leftrightarrow w_{n+1} = qw_n$;

$w_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$ or $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+i} + 1$

Donc $w_{n+1} = \frac{u_n}{1+i} + 1 + \alpha$

$w_{n+1} = \frac{1}{1+i}(u_n + 1 + i + (1+i)\alpha)$

$w_{n+1} = \frac{1-i}{2}[u_n + \alpha + (1 + i + i\alpha)]$

(w_n) est une suite géométrique $\Leftrightarrow w_{n+1} = \frac{1-i}{2}w_n$

Donc $1 + i + i\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 + i$

b) Exprimons w_n puis u_n en fonction de n.

$w_n = w_0 \times q^n$ $\quad w_0 = u_0 + \alpha = 2 - i - 1 + i = 1$ et $q = \frac{1-i}{2}$. Donc $w_n = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n$

$u_n = w_n - \alpha = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n + 1 - i$

c) Calculons $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} + w_n$

$$S_n = w_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1-i}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1-i}{2}} = (1-i)\left[1 - \left(\frac{1-i}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$S'_n = (w_0 - \alpha) + (w_1 - \alpha) + \cdots + (w_n - \alpha)$

$S'_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n - (\alpha + \alpha + \cdots + \alpha)$

$S'_n = S_n - (n+1)\alpha = (n+2)(1-i) - \frac{(1-i)^{n+2}}{2^{n+1}}$

Exercice 2

$p(M) = 0{,}4$ $\quad p(M') = 0{,}6$

1) A : « Contracter les deux maladies M et M' »

$p(A) = p(M \cap M') = p(M) \times p(M')$

(car les évènements sont indépendants)

$p(A) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$

2) B : « Contracter au moins une de ces deux maladies »

$p(B) = p(M \cup M') = p(M) + p(M') - p(M \cap M')$

$p(B) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}24 = 0{,}76$

3) C : « ne contracter aucune de ces deux maladies »

$p(C) = 1 - p(B) = 1 - 0{,}76 = 0{,}24$

Problème

$f(x) = (2xe^x)^2$

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) Déterminons les limites de f sur D_f

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2e^{2x} = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2xe^x)^2 = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

3) Montrons que $\forall x \in D_f, f'(x) = 8xe^{2x}(1+x)$

f eérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (4x^2e^{2x})'$

$f'(x) = (4x^2)'e^{2x} + 4x^2(e^{2x})' = 8xe^{2x} + 8x^2e^{2x}$

$f'(x) = 8xe^{2x}(1+x)$.

Donc $\forall x \in D_f, f'(x) = 8xe^{2x}(1+x)$

Sens de variation de f

$f'(x) = 8xe^{2x}(1+x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, 8e^{2x} > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x+1)$

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[, f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]0;+\infty[$

$\forall x \in]-1;0[, f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]-1;0[$

4) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	0,54	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = 4e^{-2} = 0{,}54$

$f(0) = 0$

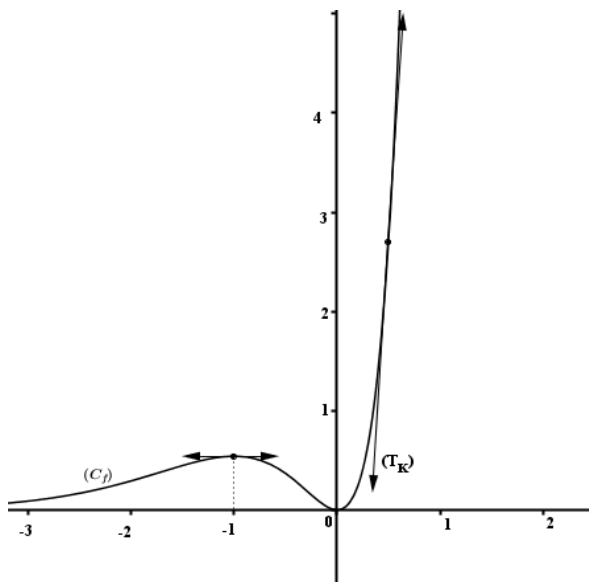
5) $(T_K): y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \times \frac{1}{2}e^1\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 6e$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = e$

$(T_K): y = 6e\left(x - \frac{1}{2}\right) + e = 6ex - 2e$

$(T_K): y = 16{,}2x - 5{,}4$

6) Construction



7-a) Calculons, en cm² l'aire $A(\lambda)$

$A(\lambda) = \int_\lambda^0 f(x)\,dx \times ua = \int_\lambda^0 4x^2e^{2x}\,dx \times ua$

$\begin{cases} u = 4x^2 \\ u' = 8x \end{cases}$ et $\begin{cases} v' = e^{2x} \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$A(\lambda) = \left([2x^2e^{2x}]_\lambda^0 - 4\int_\lambda^0 xe^{2x}\,dx\right) ua$

Calculons $\int_\lambda^0 xe^{2x}\,dx$

$\begin{cases} u = x \\ u' = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v' = e^{2x} \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$\int_\lambda^0 xe^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_\lambda^0 - \frac{1}{2}\int_\lambda^0 e^{2x}\,dx$

$A(\lambda) = \left([2x^2e^{2x}]_\lambda^0 - 4\left(\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_\lambda^0 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_\lambda^0\right)\right) ua$

$A(\lambda) = [(2x^2 - 2x + 1)e^{2x}]_\lambda^0 \times 4cm^2$

$A(\lambda) = 4\left[1 - (2\lambda^2 - 2\lambda + 1)e^{2\lambda}\right]$

b) Calculons la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers -1

$\lambda \to -1 \quad A(-1) = 4[1 - (2 + 2 + 1)e^{-2}]\ cm^2$

$A(-1) = 4(1 - 5e^{-2})\ cm^2$

BAC D 2023 NIGER

Exercice 1

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation

$(E): z^2 - (a + a^2)z + a^3 = 0$

$\Delta = (a + a^2)^2 - 4a^3 = (a - a^2)^2$

- Si $a = 0$ alors $\Delta = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0 \qquad S_\mathbb{C} = \{0\}$
- Si $a \neq 0$ alors $z_1 = a^2$ et $z_2 = a \qquad S_\mathbb{C} = \{a; a^2\}$

2) $A(1); B(a^2)$ et $C(a)$

Montrons que le triangle ABC est :

a) isocèle en C si et seulement si $|a| = 1$

On a : $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{a^2 - a}{1 - a}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|a| \times |1-a|}{|1-a|} = 1$

D'où $|a| = 1$.

b) isocèle en B si et seulement si $|a| = |a + 1|$

$\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{1 - a^2}{a - a^2}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{(1-a)(1+a)}{a(1-a)}\right| = 1$

$\Rightarrow \left|\frac{1+a}{a}\right| = 1$. D'où $|a| = |a + 1|$

c) isocèle en A si et seulement si $|a + 1| = 1$

$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{a^2 - 1}{a - 1}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{(a-1)(a+1)}{a-1}\right| = 1$

D'où $|a + 1| = 1$

d) équilatéral si et seulement si $|a| = |a + 1| = 1$

D'après a), b) et c) on a : $\begin{cases} |a| = 1 \\ |a + 1| = |a| \\ |a + 1| = 1 \end{cases}$

D'où $|a| = |a + 1| = 1$

3-a) Déterminons en fonction de θ le module et un argument du complexe $1 + a$.

On a : $a = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$1 + a = e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{-i\frac{\theta}{2}} + \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$

$1 + a = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

or $\theta \in]0;\pi[\Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ et $\cos\frac{\theta}{2} > 0$

$|1 + a| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(1 + a) = \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$

b) Justifions que le triangle ABC est isocèle $\forall\theta \in]0;\pi[$
$a = \cos\theta + i\sin\theta \Leftrightarrow |a| = 1$ alors $\forall\theta \in]0;\pi[$ ABC est isocèle.

c) Déterminons la valeur de θ pour que le triangle ABC soit équilatéral.
$|a| = |a+1| = 1$. On sait que : $|1+a| = 2\cos\frac{\theta}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \\ \theta = -\frac{2\pi}{3} + 4k\pi \end{cases}$

$\theta \in]0;\pi[\Leftrightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi}$

Exercice 2

$(E): y'(t) = k\big(a - y(t)\big)$
1) Justifions que (E) s'écrit : $(E_1): f' = -kf$
$f = a - y \Leftrightarrow y = a - f$ et $y' = -f'$
Donc $y'(t) = k\big(a - y(t)\big) \Leftrightarrow -f' = kf \Leftrightarrow f' = -kf$
D'où (E) s'écrit : $(E_1): f' = -kf$ avec $f = a - y$.

2) Résolvons (E_1)
$f' = -kf \Leftrightarrow f' + kf = 0 \Leftrightarrow f(t) = Ae^{-kt};\ A \in \mathbb{R}$
Déduisons la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.
$y(t) = a - f(t) = a - Ae^{-kt};\ A \in \mathbb{R}$
$y(0) = 0 \Leftrightarrow a - A = 0 \Leftrightarrow A = a.$
D'où : $y(t) = a(1 - e^{-kt})$

3) Calculons les valeurs de $a\ et\ k$
$\begin{cases} y(45) = 0{,}147 \\ y(90) = 0{,}274 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1 - e^{-45k}) = 0{,}147 \\ a(1 - e^{-90k}) = 0{,}274 \end{cases}$
$a(1 - e^{-90k}) = 0{,}274$
$\Leftrightarrow a(1 - e^{-45k})(1 + e^{-45k}) = 0{,}274$
or $a(1 - e^{-45k}) = 0{,}147$.
D'où $e^{-45k} = \frac{0{,}274}{0{,}147} - 1 = 0{,}36 \Leftrightarrow k = -\frac{\ln(0{,}36)}{45}$
$k \approx 0{,}003$
On a : $a = \frac{0{,}147}{1 - e^{-45\times 0{,}003}} \approx 1{,}164$

4) Calculons la proportion hydrolysée au bout de 130 mn
$a = 1{,}164\ et\ k = 0{,}003.$
Donc $y(130) = 0{,}375 = 37{,}5\%$
La proportion hydrolysée au bout de 130 mn est de 37,5%

Problème

Partie A

$g(x) = \frac{x+2}{x+1} - 2\ln(x+1)$
1) $D_g =]-1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x+1} - 2\ln(x+1) = -\infty$
car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln(x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x+2}{x+1} = +\infty$ et
$\lim\limits_{x\to-1^+} -2\ln(x+1) = +\infty$

2) Calculons $g'(x)$
g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$.
$\forall x \in]-1;+\infty[, g'(x) = \frac{x+1-x-2}{(x+1)^2} - 2\times\frac{1}{x+1} = -\frac{2x+3}{(x+1)^2}$

3) Variations et tableau de variation de g
$\forall x \in]-1;+\infty[, 2x+3 > 0\ et\ (x+1)^2 > 0$ donc $g'(x) < 0$.
Par suite g est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$.

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

4) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;1{,}1[$.
g est continue car dérivable et strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]-1;+\infty[$ vers $g(]-1;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$
Or $0 \in]-\infty;+\infty[$; par conséquent, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-1;+\infty[$
$g(1{,}1) = -0{,}0007$ et $g(1) = \frac{3}{2} - 2\ln 2 = 0{,}11.$
$g(1)\times g(1{,}1) < 0$ donc $\alpha \in]1;1{,}1[$.

5) Signe de g
g est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$
$\forall x \in]-1;\alpha[, g(x) > g(\alpha) \Leftrightarrow g(x) > 0$
$\forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < g(\alpha) \Leftrightarrow g(x) < 0$

Partie B

$f(x) = x^2(1 - \ln(x+1))$ $]-1;+\infty[$
1) Limites de f
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [x^2(1 - \ln(x+1))] = -\infty$
car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \ln(x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} [x^2(1 - \ln(x+1))] = +\infty$
car $\lim\limits_{x\to-1^+} x^2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} 1 - \ln(x+1) = +\infty$

2-a) Calculons $f'(x)$ et montrons que $\forall x \in]-1;+\infty[$ $f'(x) = xg(x)$.
f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$.
$\forall x \in]-1;+\infty[, f'(x) = 2x(1 - \ln(x+1)) + x^2\left(\frac{-1}{x+1}\right)$
$f'(x) = x\left[2 - 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right]$
$f'(x) = x\left[\frac{x+2}{x+1} - 2\ln(x+1)\right] = xg(x)$

b) Signe de $f'(x)$ et sens de variation de f.
<u>Tableau de signe</u>

x	-1	0	α	$+\infty$
x	$-$	0 $+$		$+$
$g(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0	$-$

$\forall x \in]-1;0[\cup]\alpha;+\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-1;0[$ et sur $]\alpha;+\infty[$.

$\forall x \in]0;\alpha[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;\alpha[$.

c) Tableau de variation de f

x	-1		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3) Montrons que $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{2\alpha+2}$.

$f(\alpha) = \alpha^2(1 - \ln(\alpha + 1))$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+2}{\alpha+1} - 2\ln(\alpha + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(\alpha + 1) = \frac{\alpha+2}{2(\alpha+1)}$

Donc $f(\alpha) = \alpha^2\left(1 - \frac{\alpha+2}{2(\alpha+1)}\right) = \frac{\alpha^3}{2\alpha+2}$

4) Déterminons le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = e - 1$

$(C) \cap (0x) = \{O(0;0), M(1{,}7;0)\}$

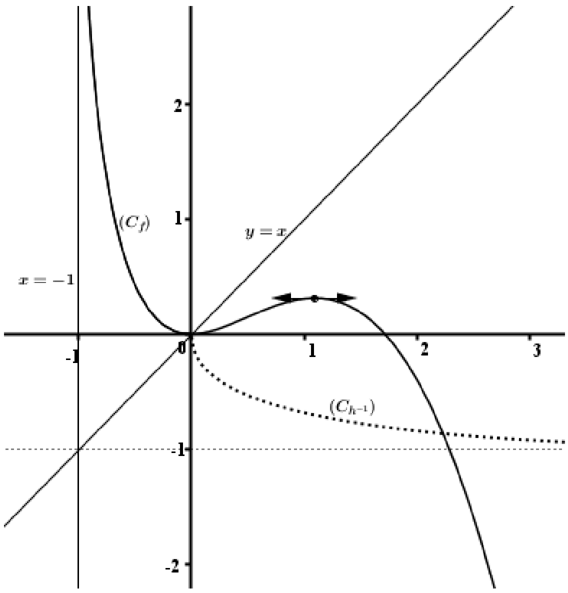
5) Précisons les branches infinies de courbe (C).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

(C) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ donc la droite (D): $x = -1$ est une asymptote verticale à (C) en $+\infty$.

6) Traçons (C)



Partie C

1) Montrons que h réalise une bijection de $]-1;0[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

h étant la restriction de f à l'intervalle $]-1;0[$;

h est continue et strictement décroissante sur $]-1;0[$.

Elle réalise donc une bijection de $]-1;0[$ vers $f(]-1;0[) =]+0;\infty[$. D'où J= $]+0;\infty[$

2) Dressons le tableau de variation de h^{-1}

h et h^{-1} on le même sens de variation. h^{-1}: J vers I.

x	0		$+\infty$
$(h^{-1})'(x)$		$-$	
$h^{-1}(x)$	0	$\searrow$	-1

3) Branche infinie de la courbe représentative de h^{-1}.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} h^{-1}(x) = -1$ donc la droite (D'): $y = -1$ est une asymptote horizontale à $(C_{h^{-1}})$.

4) Construction (Voir figure)

$(C_{h^{-1}})$ et (C_h) sont symétrique par rapport à la droite (Δ): $y = x$.