

BACCALAURÉAT
SESSION 2015

Fomesoutra.com
sa souteira
Docs à portée de main

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Le candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Toute calculatrice scientifique est autorisée.

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Partie I

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i.$$

1. a) Calculer $p(i)$.
b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $p(z) = 0$.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité : 5 cm.

On pose : $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n .

1. a) Calculer z_1 et z_2 .
b) Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.
2. On considère la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$.
a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$.
b) Démontrer que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.
c) Exprimer U_n en fonction de n .
3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$, la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$.
a) Calculer l_n .
b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$.

EXERCICE 2

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6 ;
- lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.

On désigne par A l'évènement « Il y a une affluence de clients » et par B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.

a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « Il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».

b) Démontrer que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B est égale à 0,58.

c) Mariam a réalisé un bénéfice.

Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour là.

On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

a) Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = 1 - (0,42)^n$.

b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq 0,9999$.

PROBLÈME

Partie A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = xe^{-x}$.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$.

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$.

1. Démontrer que g est une solution de l'équation (E).

2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.

a) Démontrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est une solution de (F).

b) Résoudre l'équation différentielle (F).

c) En déduire la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2} e^{-x}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) , d'unités graphiques : $OI = 2$ cm ; $OJ = 4$ cm.

1. a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) .

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3. a) Soit f' la fonction dérivée de f . Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3 + 2x - x^2}{2} e^{-x}$.

b) Étudier les variations de f .

c) Dresser le tableau de variations de f .

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 est :

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}.$$

5. Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'axe des abscisses.

6. Représenter graphiquement (T) et $(\mathcal{C})$.

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_0^1 x e^{-x} dx$.

2. a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + x e^{-x}$.

c) En utilisant la question précédente, calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

BACCALAUREAT – SESSION 2015

EPREUVE : MATHEMATIQUES DATE 30/06/15 HEURE : 08 H

CORRIGE ET BAREME

SERIE(S) :

D

CORRIGE	BAREME
Ce barème est national. Il ne peut être modifié. Certaines réponses ont été rédigées à titre indicatif. Cependant, toute autre démarche correcte sera acceptée. Le correcteur devra tenir compte de la démarche qui a conduit au résultat. A un résultat correct non justifié ou incorrectement justifié, on accordera la moitié des points. Sauf si la question est notée sur 0,25. Dans ce cas, on attribuera la note zéro (0). Toute faute sera sanctionnée une seule fois. En conséquence, on appréciera les réponses en fonction des résultats obtenus précédemment par le candidat même si ces résultats intermédiaires sont faux.	

BACCALAUREAT – SESSION 2015

SERVICE ORGANISATION DU BACCALAUREAT, Tél. S/ Direction : 20 32 19 45

Ce barème est national. Il ne peut être modifié que par la seule commission nationale de barème

EXERCICE 1 (5 pts)

PARTIE I (2,25 pts)

1. a) $P(i) = 0$ ————— 0,25 pt

b) $a = -3 - i$ ————— 0,25 pt
 $b = 2 + 2i$ ————— 0,25 pt

2. $\Delta = -2i$ ————— 0,25 pt
 $\delta^2 = \Delta$; $\delta = 1 - i$ ou $\delta = -1 + i$ ————— 0,25 pt

$z_1 = 2$ ————— 0,25 pt
 $z_2 = 1 + i$ ————— 0,25 pt

3. $S_C = \{2; i; 1 + i\}$ ————— 0,5 pt

PARTIE II (2,75 pts)

1. a) $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = i$ ————— $2 \times 0,25$ pt

b) Points bien placés ————— $3 \times 0,25$ pt

2. a) Justification Correcte ————— 0,25 pt

b) Démonstration Correcte ————— 0,25 pt
 Calcul de U_0 ————— 0,25 pt

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ————— 0,25 pt

3. a) $L_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)$ ————— 0,25 pt

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2$ ————— 0,25 pt

CORRIGÉ

BAREME

EXERCICE II (4 pts)

1.a) $P(E) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,42$

0,5 pt

b) $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = 0,58$

0,5 pt

c) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,72$

0,5 pt

2.a) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

0,5 pt

b) $P(X=k) = C_3^k (0,58)^k (0,42)^{3-k}$

$X=k$	0	1	2	3	Total
$P(X=k)$	0,07	0,31	0,42	0,2	1

0,25 x 4 pt

c) $E(X) = np = 1,74$

0,5 pt

3.a) Justification Correcte

0,25 pt

b) On a successivement:

$$n \geq \frac{-4 \ln 10}{\ln(0,42)}$$

$$n \geq 10,6$$

$$n \geq 11$$

La valeur minimale de n est 11

0,25 pt

CORRIGE

BAREME

PROBLEME (11 pts)

PARTIE A (2 pts)

1. Démonstration correcte

0,5 pt

2. a) Si φ est solution de (E) alors $\varphi - g$ est solution de (F)

0,25 pt

Si $\varphi - g$ est solution de (F) alors φ est solution de (E)

0,25 pt

b) les solutions de l'équation différentielle sont sous la forme: ke^{-x} , ($k \in \mathbb{R}$)

0,5 pt

c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + ke^{-x}$; $k \in \mathbb{R}$

0,25 pt

$$\varphi(0) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}; \quad \varphi(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$$

0,25 pt

PARTIE B (7 pts)

1. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3}{2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

0,5 point

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

0,5 pt

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

0,5 pt

La droite (OI) est asymptote horizontale de (C) en $+\infty$

0,25 pt

3. a) Calcul de $f'(x)$

0,75 pt

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$

0,25 x 2 pt

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[\quad f'(x) < 0$

0,25 pt

$\forall x \in]-1; 3[\quad f'(x) > 0$

0,25 pt

Sens de Variation de f

0,5 pt

c)

Tableau de Variation

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$-e$	$3e^{-3}$		0

0,5 pt

4. $f'(0) = \frac{3}{2}$

0,25 pt

$f(0) = -\frac{3}{2}$

0,25 pt

(T): $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

0,25 pt

5. (C) Coupe la droite (OI) aux points d'abscisses $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

0,25 pt

(C) est au dessus de la droite (OI) sur les intervalles $]-\infty; -\sqrt{3}[$ et $]\sqrt{3}; +\infty[$

0,25 pt

(C) est au dessous de la droite (OI) sur l'intervalle $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$

0,25 pt

6. Voir la Courbe

le tracé de (T)

0,25 pt

le tracé de (C)

0,75 pt

CORRIGE

BAREME

PARTIE C (2 pts)

1. $\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$

0,5 pt

2. a) Vérification correcte

0,5 pt

b) Dédution

0,5 pt

c) $A = \int_0^1 f(x) dx \times t \text{ UA}$

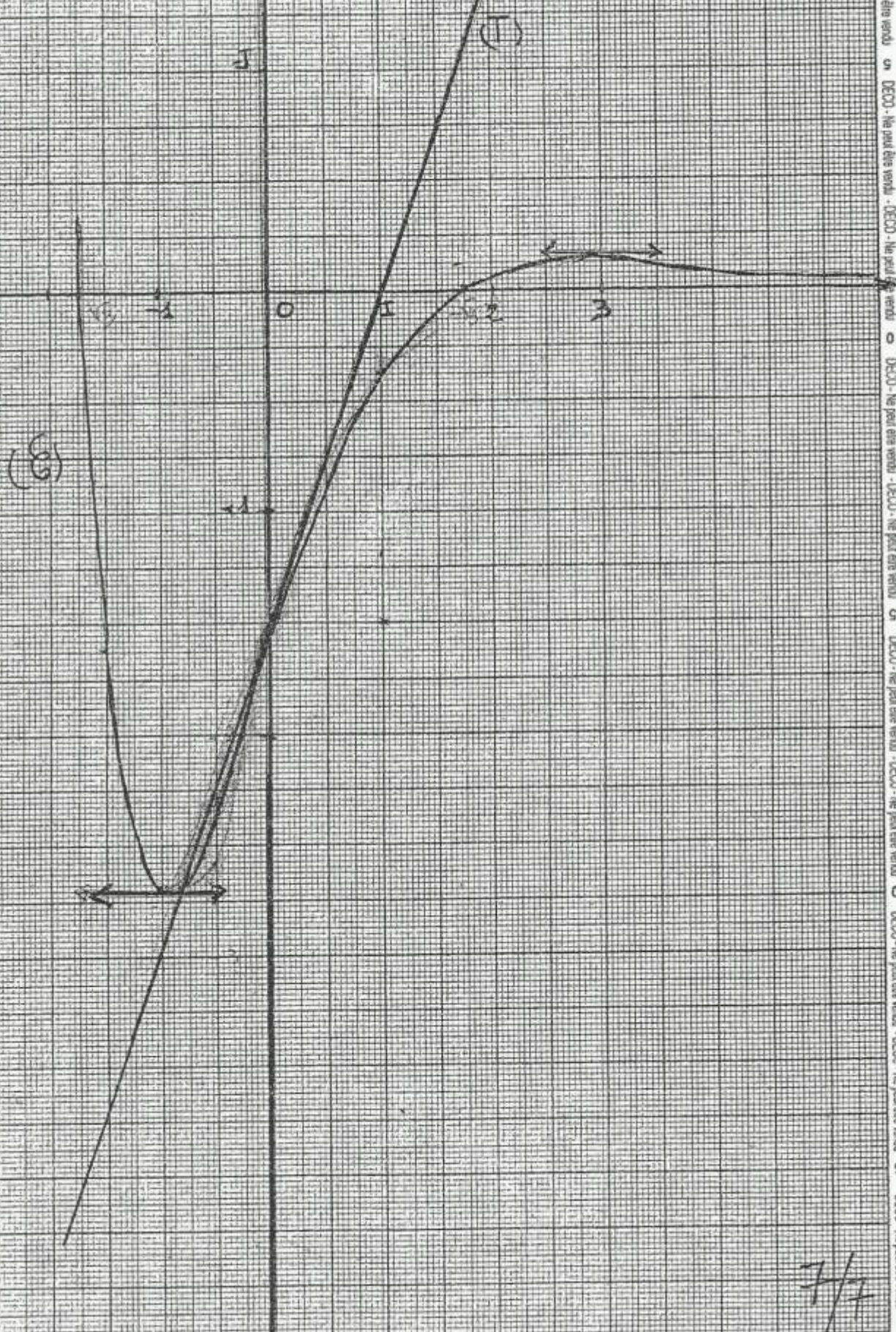
$= \int_0^1 [-f'(x) + x e^{-x}] dx \text{ UA}$

$= \left(\frac{1}{2} + e^{-1}\right) \text{ UA} = (4 + 8e^{-1}) \text{ cm}^2$

0,5 pt

MATHÉMATIQUES

Fomesoutra.com
sa soutra !
Docs à portée de main



7/7