

BACCALAURÉAT
SESSION 2020

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Une entreprise achète, utilise et revend des machines à coudre après un certain nombre d'années. Le tableau suivant donne l'évolution du prix Y de vente d'une machine en fonction du nombre d'années X d'utilisation.

Nombre x_i d'années	1	2	3	4	5	6
Prix y_i (en milliers de francs CFA)	150	125	90	75	50	45

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Unités graphiques : en abscisse, 1 cm pour une année ; en ordonnée, 1 cm pour 20 000 F.

- Représente le nuage de points associés à la série statistique (X, Y).
- Détermine les coordonnées du point moyen G du nuage de points de cette série statistique.
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
 - On note $V(X)$ la variance de X et $\text{Cov}(X, Y)$ la covariance de (X, Y).
Démontre que : $V(X) = \frac{35}{12}$ et $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{255}{4}$.
- On admet que la variance $V(Y)$ de Y est égale à 1445.
 - Justifie que le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (X, Y) est $\frac{-3\sqrt{21}}{14}$.
 - Justifie qu'il existe une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y.
- Soit (D) la droite de régression de Y en X.
Démontre, par la méthode des moindres carrés, qu'une équation de (D) est : $y = -\frac{153}{7}x + \frac{497}{3}$.
- Détermine le prix de vente d'une machine à coudre à la fin de la 7^e année.
On arrondira le résultat au multiple le plus proche de 5.

EXERCICE 2

1. On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^3 + (1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = 0$.
 - a) Justifie que $2i$ est une solution de (E).
 - b) Justifie que : $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + (1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = (z - 2i)[z^2 + (1 + 3i)z - 4]$.
 - c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + (1 + 3i)z - 4 = 0$.
 - d) Dédus des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i$; $1 - i$; $2i$ et $-2 - 2i$.
 - a) Place les points A, B, C et D sur votre feuille de copie.
 - b) Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.

3. Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.
 - a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z - 2 + 2i$.
 - b) Démontre que $S(B) = C$.
 - c) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - e^{-x}$.

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. Démontre que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis dresse son tableau de variation.

3. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On la note α .
 b) Justifie que : $0,3 < \alpha < 0,4$.

4. Justifie que : $\forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x) < 0$;
 $\forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 1)(2e^x - 1)$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 Donne une interprétation graphique des résultats obtenus.

2. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 b) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x + 2(x - 1)e^x$.
 c) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.
 d) Étudie la position relative de (C_f) et (D).

3. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$.
 - b) Étudie le sens de variation de f .
 - c) Dresse le tableau de variation de f .
4.
 - a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.
 - b) Déduis-en les coordonnées des points d'intersection A et B de (C_f) et de l'axe des abscisses.
On choisira : $x_A < x_B$ (x_A et x_B étant les abscisses respectives de A et B).
5. Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
6. Trace les droites (D) et (T), puis construis (C_f) .
On prendra : $\alpha = 0,35$ et $f(\alpha) = -1,2$.
7. À l'aide d'une intégration par parties, calcule l'aire en cm^2 , de la partie du plan délimitée par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.