CORRECTION MATHS BAC D 2010

EXERCICE 1

Partie A

1. Les racines carrées de $6+6i\sqrt{3}$

Soit $\Delta = 6+6i\sqrt{3}$

$|\Delta| = |6+6i\sqrt{3}| = \sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+36 \text{ x } 3} = \sqrt{36+108} = \sqrt{144} = \sqrt{12}$

$|\Delta| = 12$

Soit $d = x+iy$ une racine carrée de $\Delta = 6+6i\sqrt{3}$. On a :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = |\Delta| \\ x^2-y^2 = \mathrm{Re}|\Delta| \\ 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 12 & (1) \\ x^2-y^2 = 6 & (2) \\ 2xy = 6\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 & (1)+(2) \\ 2y^2 = 6 & (1)-(2) \\ xy = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 3 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = -3 \\ y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\sqrt{3} \\ x \text{ et } y \text{ sont de même signe.} \end{cases}$$

On en déduit que les racines carrées de $\Delta = 6+6i\sqrt{3}$ sont :

$d = 3+\sqrt{3}\,i$ et $d' = -3-\sqrt{3}\,i$

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 1+3i\sqrt{3}\,z - 4 = 0$

$\Delta = (1+3i\sqrt{3})^2 - 4\text{x}2\text{x}(-4) = 1+2\text{x}1\text{x}\,(3i\sqrt{3})+(3i\sqrt{3})^2+32$; $\Delta = 1+6i\sqrt{3}-27+32 = 6+6i\sqrt{3}$

Les racines carrées de $\Delta = 6+6i\sqrt{3}$ sont $d = 3+\sqrt{3}\,i$ et $d' = -3-\sqrt{3}\,i$ (d'après 1.)

$$z_1 = \frac{-b-d}{2a} = \frac{(1+3\sqrt{3}\,i)-3-\sqrt{3}i}{2\text{x}2} = \frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{4} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b+d}{2a} = \frac{(1+3\sqrt{3}\,i)+3+\sqrt{3}i}{2\text{x}2} = \frac{4+4\sqrt{3}\,i}{4} = 1+\sqrt{3}\,i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{1+\sqrt{3}\,i \;;\; -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

3.a. Développer, réduire et ordonner : $(2z+1)[2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4]$

$$\begin{aligned}(2z+1)[2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4] &= 4z^3-2(1+3i\sqrt{3})z^2-8z+2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4 \\ &= 4z^3-2(1+3i\sqrt{3}-1)z^2-(8+1+3i\sqrt{3})z-4 \\ &= 4z^3-2(3i\sqrt{3})z^2-(9+3i\sqrt{3})z-4 \\ &= 4z^3-6i\sqrt{3}\,z^2-3(3+i\sqrt{3})z-4\end{aligned}$$

b. En déduire les solutions de (E).

$$4z^3 - 6i\sqrt{3}\,z^2 - 3(3+i\sqrt{3})z - 4 = 0 \iff (2z+1)[2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4] = 0$$
$$\iff 2z+1 = 0 \text{ ou } 2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4 = 0$$
$$\iff z = -\frac{1}{2} \text{ ou } 2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4 = 0$$

$z_0 = -\frac{1}{2}$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2 = 1+\sqrt{3}\,i$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{1}{2} \,;\, 1+\sqrt{3}\,i \,;\, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

4. Expression de z_0, z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

- $z_0 = -\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} |z_0| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \\ \arg(z_0) = \arg(-\frac{1}{2}) = \pi \end{array}\right\} z_0 = \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$$

- $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$|z_1| = \left|\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \text{x} \left|-1+\sqrt{3}\,i\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \text{x} \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \text{ x } \sqrt{4} = \frac{2}{2} = 1$$

Soit $\theta = \arg(z_1)$; on a : $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$ $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ainsi $z_1 = 1 \text{ x } (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

- $z_2 = 1+\sqrt{3}\,i$ $\quad |z_2| = \left|1+\sqrt{3}\,i\right| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Soit $\theta' = \arg(z_2)$; on a : $\left.\begin{array}{l} \cos\theta' = \frac{1}{2} \\ \sin\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$ $\theta' = \frac{\pi}{3}$; d'où $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

__Partie B__

S similitude directe de centre O, d'angle $\theta = -\frac{\pi}{3}$ et de rapport $k = 2$.

1.a. Ecriture complexe de S.

$z' = az + b$

$$a = ke^{i\theta} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right] = 2\left[\frac{1}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 1 - \sqrt{3}i$$

$\omega = \frac{b}{1-a} \Rightarrow b = \omega(1-a) = 0 \text{ x } (1-a) = 0$

$z' = (1-\sqrt{3}i)z$

b. Justifions que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$

- $z'_0 = (1-\sqrt{3}i)z_0 = (1-\sqrt{3}i)(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_1$; $z'_0 = z_1 \Rightarrow S(M_0) = M_1$

- $z'_1 = (1-\sqrt{3}i)\,z_1 = (1-\sqrt{3}i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}$

$z'_1 = \frac{2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2}i = 1+\sqrt{3}i = z_2$; $z'_1 = z_2 \Rightarrow S(M_1) = M_2$

2. Justifions que $z_{n+1} = (1-\sqrt{3}i)\,z_n$

$M_{n+1} = S(M_n) \Leftrightarrow z_{n+1} = f(z_n) \Leftrightarrow z_{n+1} = (1-\sqrt{3}i)\,z_n$

3. Soit (U_n) définie pour tout entier n par $U_n = |z_n|$

a. Démontrons que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

$U_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1-\sqrt{3}i)\,z_n| = |(1-\sqrt{3}i)|\,|z_n| = \sqrt{4}\ \text{x}\ |z_n| = 2\ \text{x}\ |z_n| = 2\ \text{x}\ U_n$

$U_{n+1} = 2\ \text{x}\ U_n \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 2$ donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme

$U_0 = |z_0| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

b. Justifions que la distance $OM_{12} = 2048$

$OM_{12} = |z_{M_{12}} - z_0| = |z_{M_{12}}| = |z_{12}| = U_{12}$ or $U_n = U_0\, q^n = \frac{1}{2}\ \text{x}\ 2^n$ car (U_n) est une suite géométrique .

$U_{12} = \frac{1}{2}\ \text{x}\ 2^{12} = \frac{1}{2}\ \text{x}\ 4096 = 2048 \Rightarrow OM_{12} = U_{12} = 2048$

__Exercice 2__

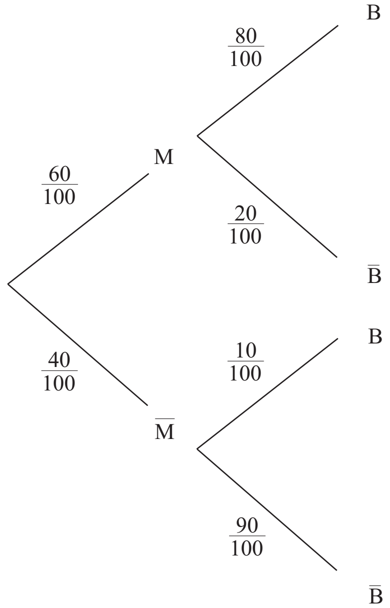
M : Prise du médicament

$\overline{M}$: Pas de prise du médicament

B : Baisse du taux glycémie

$\overline{B}$: Pas de baisse du taux de glycémie

Arbre de probabilité



1. La probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament est :

$$P_M(B) = \frac{80}{100}$$

2. Montrons que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.

$$P(B) = P(M \cap B) + P(\overline{M} \cap B) = P(M) \text{ x } P_M(B) + P(\overline{M}) \text{ x } P_{\overline{M}}(B)$$

$$= \frac{60}{100} \text{ x } \frac{80}{100} + \frac{40}{100} \text{ x } \frac{10}{100} = \frac{4800}{100 \text{ x } 100} + \frac{400}{100 \text{ x } 100} = \frac{48}{100} + \frac{4}{100}$$

$$P(B) = \frac{52}{100} = 0{,}52$$

3. Probabilité que l'individu ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

$$P_B(M) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M) \text{ x } P_M(B)}{P(B)} = \frac{\frac{60}{100} \text{ x } \frac{80}{100}}{\frac{52}{100}}$$

$$P_B(M) = \frac{\frac{48}{100}}{\frac{52}{100}} = \frac{48}{100} \text{ x } \frac{100}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13} = 0{,}93$$

4. Soit *p* la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie :

$p = 0{,}52$; $q = 1$; $p = 0{,}48$

Le contrôle sur un individu conduit à 2 éventualités :

- une baisse du taux de glycémie de probabilité $p = 0{,}52$
- ou une absence de baisse du taux de glycémie de probabilité $q = 0{,}48$.

C'est donc une épreuve de Bernoulli.

On répète 5 fois cette épreuve.

On calcule les probabilités à l'aide de la loi binomiale $P(X = K) = C_n^k P^k q^{n-k}$

a. La probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.

$$P(X = 2) = C_5^2 P^2 q^3 = 10 \text{ x } (0{,}52)^2 \text{ x } (0{,}48)^3 = 0{,}299$$

b. La probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_5^0 P^0 q^5 = 1 - q^5 = 1 - (0{,}48)^5 = 0{,}975$$

5. Déterminons n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieure à 0,98.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_n^0 P^0 q^n = 1 - q^n = 1 - (0{,}48)^n$$

$$P(X \geq 1) > 0{,}98 \Leftrightarrow 1 - (0{,}48)^n > 0{,}98 \Leftrightarrow -(0{,}48)^n > 0{,}98 - 1$$

$$\Leftrightarrow -(0{,}48)^n > -0{,}02 \Leftrightarrow (0{,}48)^n < 0{,}02$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}48)^n < \ln(0{,}02) \Leftrightarrow n\ln(0{,}48) < \ln(0{,}02)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}48)} \Leftrightarrow n > 5{,}33 \quad ; \quad P(X \geq 1) > 0{,}98 \Leftrightarrow n = 6$$

PROBLEME

Partie A

1. a. Justifions que $\forall x \in \,]0\,;+\infty[\quad g'(x) = 1 + \ln x$

$g'(x) = (1 + x\ln x)' = (x\ln x)' = (x)' \text{ x } (\ln x) + x \text{ x } (\ln x)' = 1 \text{ x } (\ln x) + x \text{ x } \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 + \ln x$

b) Etude des variations puis tableau de variation de g

$g'(x) = 1 + \ln x$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

$\forall x \in \left]0\,;+\frac{1}{e}\right[\quad g'(x) < 0$ D'où g est strictement décroissante sur $\left]0\,;+\frac{1}{e}\right[$

$\forall x \in \left]\frac{1}{e}\,;+\infty\right[\quad g'(x) > 0$ D'où g est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$

Tableau de variation de g :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	

2. g admet sur $]0\,;+\infty[$ $\frac{e-1}{e} > 0$ comme minimum absolu. Donc $\forall x \in \,]0\,;+\infty[\quad g(x) > 0$

Partie B

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{1+x\ln x} \end{cases}$$

1.a. Etude de la continuité de f en 0

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1+x\ln x} = \dfrac{0}{1+0}$ car $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \Rightarrow$ f est donc continue en 0.

b. Etude de la dérivabilité de f en 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\dfrac{x}{1+x\ln x} - 0}{x - 0} = \frac{x}{1+x\ln x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{1+x\ln x}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1+x\ln x} = 1$ car $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe et est finie donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

c. Tangente au point d'abscisse 0

$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1 \times (x - 0) + 0$

$(T) : y = x$

d. Position relative de (C) et (T)

$$f(x) - x = \frac{x}{1+x\ln x} - x = \frac{x - x - x^2\ln x}{1+x\ln x} = \frac{-x^2\ln x}{1+x\ln x} = \frac{x^2}{1+x\ln x} \times (-\ln x)$$

$\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$ $g(x) = 1+x\ln x > 0$ et $x^2 > 0$ donc le signe de $f(x) - x$ dépend du signe de $(-\ln x)$

$f(x) - x > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < e^0 \Leftrightarrow x < 1$

On en déduit :

Sur $]0\,;1[$ (C) est au dessus de (T)

Sur $]1\,;+\infty[$ (C) est en dessous de (T)

2. Démontrons que (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$

$$f(x) = \frac{x}{1+x\ln x} = \frac{x}{x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{x} + \ln x} = 0$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + \ln x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ (OI) ; $y = 0$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

3.a. Démontrons que : $f'(x) = \dfrac{1 - x}{(1 + x\ln x)^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{(1 + x\ln x)}\right)' = \frac{(x)' \times (1 + x\ln x) - (x) \times (1 + x\ln x)'}{(1 + x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (1 + x\ln x) - (x) \times \left(0 + 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)}{(1 + x\ln x)^2} = \frac{1 + x\ln x - x \times (\ln x + 1)}{(1 + x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 + x\ln x - x - x\ln x}{(1 + x\ln x)^2} = \frac{1 - x}{(1 + x\ln x)^2}$$

b. Etude des variations et tableau de variation de *f*

$$f'(x) = \frac{1 - x}{(1 + x\ln x)^2}$$

$(1 + x\ln x)^2 > 0 \Rightarrow$ le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $1 - x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

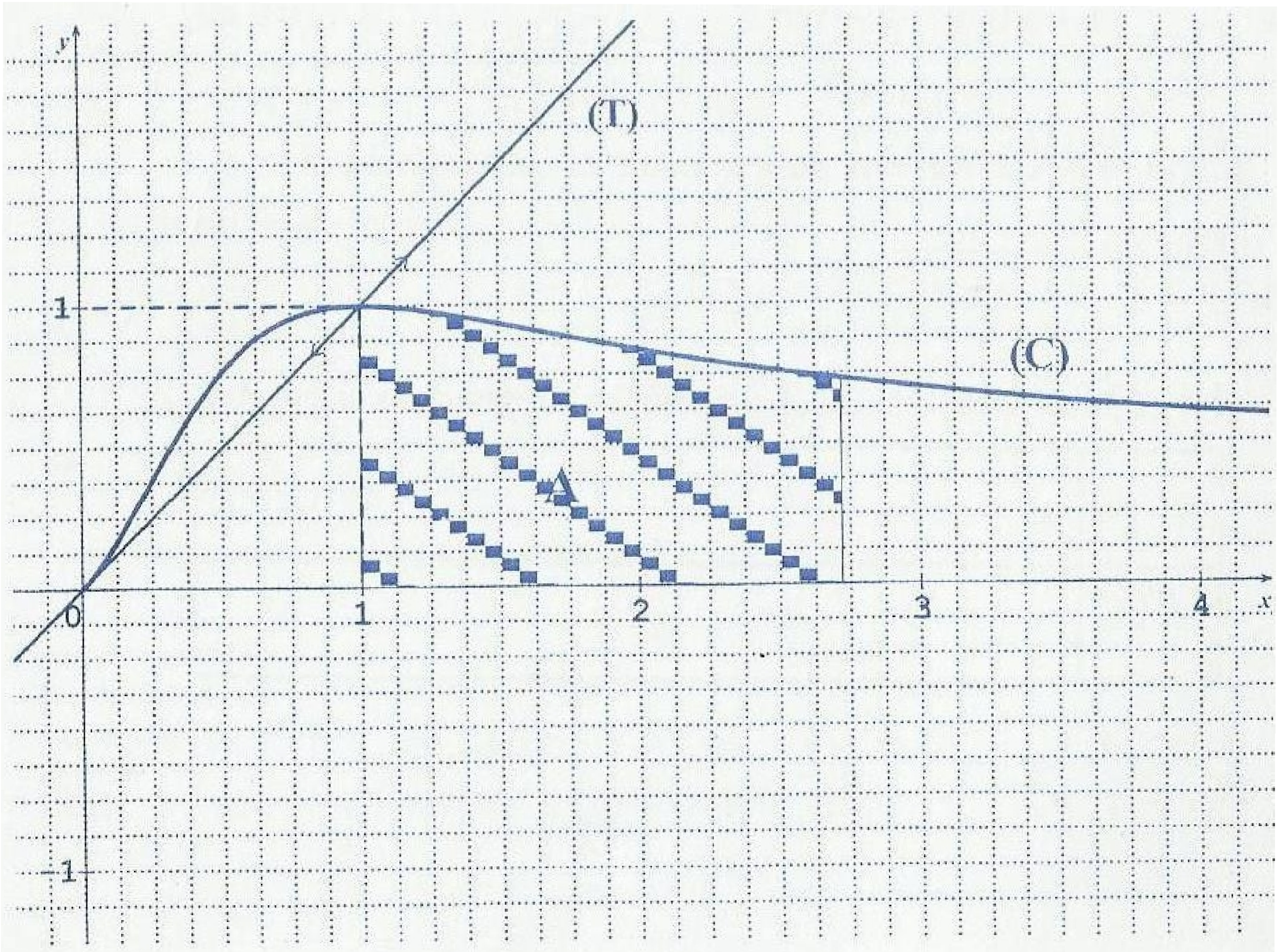
$\forall x \in \,]0\,;1[\quad f'(x) > 0$ et f est strictement croissante

$\forall x \in \,]1\,;+\infty[\quad f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante

Tableau de variation de *f*

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

4. **Construction de la droite (T) et de la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J)**



Partie C

1.a. Justifions que : $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad f(x) \leq 1$

f admet sur $\left]0\,;+\infty\right[$ 1 comme minimum absolu et $f(1) = 1$. Donc $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad f(x) \leq 1$

1. Démontrons que : $\forall x \in \left]1\,;\,e\right[\quad 1 - \dfrac{1}{1+x} \leq f(x)$

$x \in \left]1\,;\,e\right[\iff 1 \leq x \leq e \iff \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e$ car la fonction $x \longmapsto \ln x$ est strictement croissante

$$\iff \ln x \leq 1 \iff x\ln x \leq x \iff 1 + x\ln x \leq 1 + x$$

$$\iff \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x\ln x} \iff \frac{x}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x} \iff \frac{1+x-1}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x}$$

$$\iff \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x} \iff 1 - \frac{1}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x}$$

$$\iff 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$$

2. $\mathcal{A}$ **est l'aire de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.**

Démontrons que : $16(e-1) + 16\ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right) \leq \mathcal{A} \leq 16(e-1)$

$$A = \int_1^e (f(x) - 0)\, dx \times UA = \int_1^e f(x)\, dx \times UA = \int_1^e \frac{x}{1 + x\ln x}\, dx \times UA \quad ; \quad UA = 4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$$

On a montré :

en 1.a. que $\forall x \in]0 ; +\infty[\quad f(x) \leq 1$

en 1.b. que $\forall x \in]1 ; e[\quad 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

donc $\forall x \in]1 ; e[\quad 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq 1$

$$1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq 1 \iff \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \leq \int_1^e f(x)\, dx \leq \int_1^e 1\, dx$$

$$\iff \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \times UA \leq \int_1^e f(x)\, dx \times UA \leq \int_1^e 1\, dx \times UA$$

$$\iff \left[x - \ln(1+x)\right]_1^e \times 16 \leq A \leq \left[x\right]_1^e \times 16$$

$$\iff 16\left[e - \ln(1+e) - (1 - \ln(1+1))\right] \leq A \leq \left[e - 1\right] \times 16$$

$$\iff 16\left(e - \ln(1+e) - 1 + \ln 2\right) \leq A \leq 16(e-1)$$

$$\iff 16\left(e - 1 + \ln\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$$

$$\iff 16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$$