CORRECTION BAC D 2011 SESSION NORMALE

EXERCICE 1

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$

1.a Démontrons que la suite (v_n) est convergente après avoir déterminé sa limite.

$$\lim v_n = \lim \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \lim \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$\Rightarrow \lim v_n = 1$

$\lim v_n$ existe et est finie donc la suite (v_n) est convergente.

b. Démontrons que la suite (v_n) est croissante.

$$v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+2)}{((n+1)+1)^2} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^3(n+3)}{(n+2)^2(n+1)^2} - \frac{n(n+2)^3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^3(n+3) - n(n+2)^3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^2(n+1)(n+3) - n(n+2)(n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+3) - (n^2+2n)(n^2+4n+4)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n^4+6n^3+12n^2+10n+3)-(n^4+6n^3+12n^2+8n)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2n+3 > 0 \text{ et } (n+2)^2(n+1)^2 > 0 \Rightarrow \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2} > 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n > 0$

On déduit que la suite (v_n) est croissante.

c. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{3}{4} \leq v_n < 1$

$\lim v_n = 1 \Rightarrow v_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

La suite v_n est une suite croissante.

Son terme le plus petit est son premier terme v_1 c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_1 \leq v_n$

Or $v_1 = \dfrac{1^2 + 2 \text{ x } 1}{(1+1)^2} = \dfrac{1+2}{2^2} = \dfrac{3}{4}$ D'où $\dfrac{3}{4} \leq v_n$

Finalement : $\dfrac{3}{4} \leq v_n < 1$

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $a_n = v_1 \text{ x } v_2 \text{ x} \cdots \text{x } v_n$

a. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

$a_n = v_1 \text{ x } v_2 \text{ x} \cdots \text{x } v_n \Rightarrow a_1 = v_1 = \dfrac{3}{4}$

$a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)} \Rightarrow a_1 = \dfrac{1+2}{2(1+1)} = \dfrac{3}{2(2)} = \dfrac{3}{4}$

La propriété est donc vraie à l'ordre 1.

Supposons que $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_k = \dfrac{k+2}{2(k+1)}$

Et montrons que $a_{k+1} = \dfrac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$

$a_k = v_1 \text{ x } v_2 \text{ x} \cdots \text{x } v_k$

$a_{k+1} = \underbrace{v_1 \text{ x } v_2 \text{ x} \cdots \text{x } v_k}_{a_k} \text{ x } v_{k+1}$

$a_{k+1} = a_k \text{ x } v_{k+1} = \dfrac{k+2}{2(k+1)} \text{ x } \dfrac{(k+1)^2 + 2(k+1)}{((k+1)+1)^2}$

$a_{k+1} = \dfrac{k+2}{2(k+1)} \text{ x } \dfrac{(k+1)((k+1)+2)}{(k+2)^2}$

$a_{k+1} = \dfrac{k+2}{2(k+1)} \text{ x } \dfrac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$

$a_{k+1} = \dfrac{(k+2) \text{ x } (k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)^2} = \dfrac{(k+3)}{2(k+2)}$

$a_{k+1} = \dfrac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$

On a supposé que $a_K = \dfrac{(k+2)}{2(k+1)}$ et on a montré que $a_{k+1} = \dfrac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$

Finalement, on conclue que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

b. En déduire la limite de la suite (a_n).

$a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)} = \dfrac{n+2}{2n+2} \Rightarrow \lim a_n = \lim \dfrac{n+2}{2n+2} = \lim \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$

3. On pose pour tout entier naturel n : $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n)$

a. Démontrons que (b_n) est une suite à termes négatifs.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3}{4} \leq v_n < 1 \Rightarrow v_n < 1 \Rightarrow \ln(v_n) < \ln 1 \Rightarrow \ln(v_n) < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Donc (b_n) est une suite à termes négatifs (car somme de valeurs toutes négatives).

b. Calculons la limite de la suite (b_n)

$a_n = v_1 \text{ x } v_2 \text{ x} \cdots \text{x } v_n$

$\ln a_n = \ln(v_1 \text{ x } v_2 \text{ x} \cdots \text{x } v_n)$

$\ln a_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n) = b_n \Rightarrow \lim b_n = \lim(\ln a_n) = \ln \lim(a_n) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim b_n = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

<u>Exercice 2</u>

1.a. Calculons E(X) l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

E(X) = 220 x 0,08 + 230 x 0,10 + 240 x a + 250 x b + 260 x 0,16 + 270 x 0,15 + 280 x 0,04

E(X) = 17,6 + 23 + 240a + 250b + 41,6 + 40,5 + 11,2

E(X) = 133,9 + 240a + 250b

b. Sachant que E(X) = 250, justifions que a = 0,14 et b = 0,33

E(X) = 250 $\Leftrightarrow$ 133,9 + 240a + 250b = 250

De plus, $\sum_{i=1}^{7} Pi = 1 \Leftrightarrow$ 0,08 + 0,1 + a + b + 0,16 + 0,15 + 0,04 = 1 $\Leftrightarrow$ 0,53 + a + b = 1

On en déduit le système : $\begin{cases} 133{,}9 + 240a + 250b = 250 \\ 0{,}53 + a + b = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 133{,}9 + 240a + 250b = 250 & (1) \\ 132{,}5 + 250a + 250b = 250 & (2) \end{cases}$

(1) - (2) $\Rightarrow$ 1,4 - 10a = 0 $\Rightarrow$ -10a = - 1,4 $\Rightarrow$ $a = \frac{-1{,}4}{-10} = 0{,}14$

0,53 + a + b = 1 $\Rightarrow$ b = 1- 0,53 - a = 0,47 - a = 0,47 - 0,14 = 0,33

Finalement : a = 0,14 et b = 0,33

2. Calculons la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250g.

$P(X \geq 250)$ = b + 0,16 + 0,15 + 0,04 = 0,33 + 0,16 + 0,15 + 0,04

$P(X \geq 250) = 0{,}68$

3. Calculons la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g.

Chaque choix conduit à 2 éventualités : soit le sachet a 220g ou non. Chaque événement est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre 5 et 0,08.
Ces épreuves de Bernoulli se répètent de manière indépendante.
La probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g se calcule à l'aide de la loi binômiale :

$P(X = 3) = C_5^3 (0{,}08)^3 \text{ x } (0{,}92)^2 = 10 \text{ x } (0{,}00051) \text{ x } (0{,}8464)$

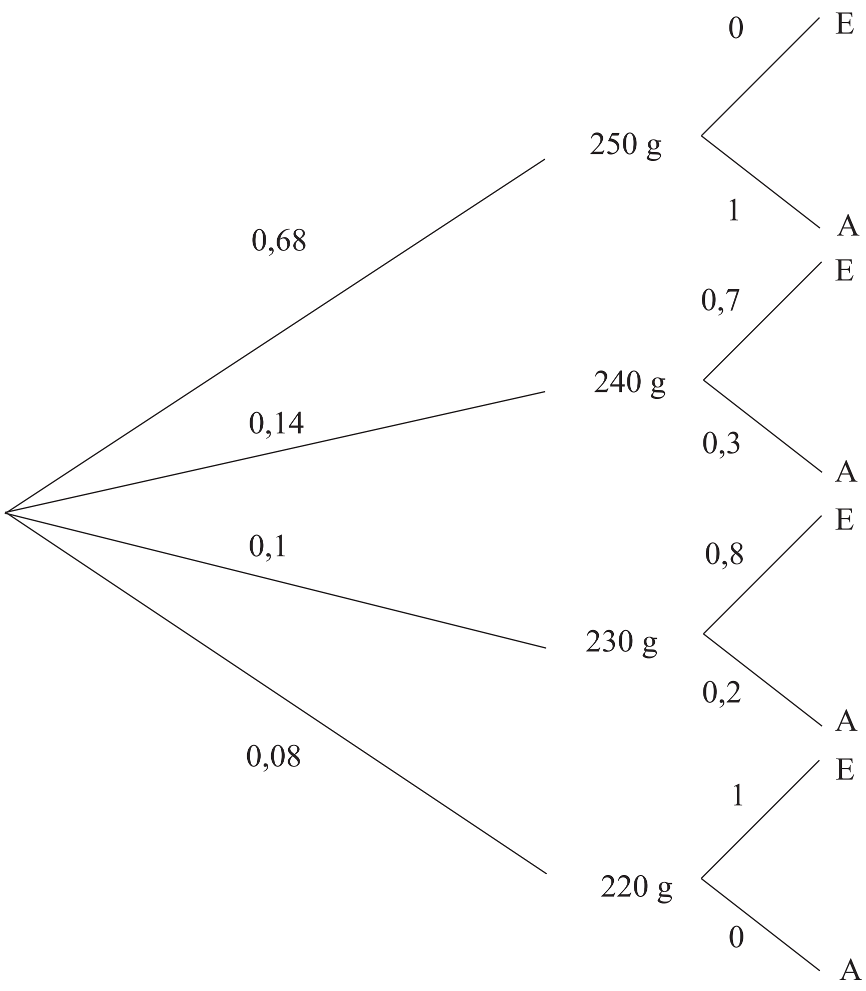
$P(X = 3) = 0{,}00432$

4. Arbre de probabilité

On note :

A : l'événement " le sachet est accepté".

E : l'événement " le sachet est éliminé".



a. Justifions que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,098.

Soit G : l'événement "le sachet a 240g".

Et E : l'événement "le sachet est éliminé".

$P(G \cap E) = P(G) \times P_G(E)$

$P(G \cap E) = 0,14 \times 0,7 = 0,098$

b. Calculons la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

$P(E) = 0,14 \times 0,7 + 0,1 \times 0,8 + 0,08 \times 1 = 0,098 + 0,08 + 0,08$

$P(E) = 0,258$

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par $g(x) = -\dfrac{2x+1}{x^2} + \ln x$

1. a. Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{x} = 0 \end{cases}$

b. Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\dfrac{2x+1}{x^2} = -\infty \end{cases}$ En effet $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -(2x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ avec $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

2.a. Démontrons que : $\forall\ x \in]0\,;+\infty[\ \ g'(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$

$$g'(x) = \left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x\right)' = \left(\frac{-2x-1}{x^2}\right)' + (\ln x)'$$

$$= \frac{-2x^2-(2x)(-2x-1)}{(x^2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2x^2+4x^2+2x}{x^4} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2x^2+2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+2x}{x^4} + \frac{x^3}{x^4} = \frac{x^3+2x^2+2x}{x^4}$$

$$= \frac{x(x^2+2x+2)}{xx^3} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$$

Donc $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$

b. En déduire le sens de variation de g.

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $x^3 > 0$ Donc le signe de g'(x) est le même que celui de x^2+2x+2

Etudions le signe de x^2+2x+2

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$

Le signe de x^2+2x+2 est le même que celui du coefficient de x^2 qui est 1. On en déduit que :

$x^2+2x+2 > 0\ \ \forall x \in]0\,;+\infty[$. Donc $\forall x \in]0\,;+\infty[\ \ g'(x) > 0$

Finalement, g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

c). Dressons le tableau de variation de la fonction g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. Démontrons que $x \in]0\,;+\infty[$ $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$g\left(]0\,;+\infty[\right) =]-\infty\,;+\infty[$, $0 \in]-\infty\,;+\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;+\infty[$.

b. Justifions que : $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$

g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et en particulier sur]2,55; 2,56[.

$$\left.\begin{array}{l} g(2{,}55) = -0{,}002 \quad < 0 \\ g(2{,}56) = 0{,}006 \quad > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(2{,}55) \times g(2{,}56) < 0 \quad \text{donc} \quad 2{,}55 < \alpha < 2{,}56$$

c. Démontrons que : $\begin{cases} \forall x \in]0\,;\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit : $\begin{cases} \forall x \in]0\,;\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

1.a. Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis donnons une interprétation graphique du résultat.

$$\lim_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0\\ >}} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x} = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{\substack{x \to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{\substack{x \to 0\\ >}} -\ln x = +\infty \\ \lim_{\substack{x \to 0\\ >}} e^{-x} = e^{-0} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0\\ >}} f(x) = +\infty$$

La droite (OJ) d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C).

b. Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis donnons une interprétation graphique du résultat.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{xe^{x}} - \frac{\ln x}{e^{x}}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{car} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{xe^{x}}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{e^{x}}\right) = 0$$ (croissance comparée des fonctions $\ln x$ et e^{x}).

La droite (OJ) d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

2. Démontrons que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \ln\alpha\right)e^{-\alpha}$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\alpha+1}{\alpha^2} + \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$

$\Rightarrow f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha} = \left(\frac{\alpha - 2\alpha - 1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}$

$\Rightarrow f(\alpha) = \left(\frac{-\alpha - 1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha} = \left(-\frac{\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}$ donc $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

3.a. Démontrons que : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = e^{-x}g(x)$

$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}\right)' = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)'e^{-x} + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)(e^{-x})'$

$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)(-e^{-x}) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \ln x\right)e^{-x}$

$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)e^{-x} + \ln x\, e^{-x} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \ln x\right)e^{-x}$

$f'(x) = \left(-\frac{1+2x}{x^2} + \ln x\right)e^{-x} = g(x)e^{-x}$

Donc $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = e^{-x}g(x)$

b. En utilisant la partie A, déterminons les variations de f.

$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = e^{-x}g(x)$

$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ e^{-x} > 0$ Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$.

Or $\begin{cases} \forall x \in]0\,;\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \forall x \in]0\,;\alpha[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[, f'(x) > 0 \end{cases}$

On en déduit que : sur $]0\,;\alpha[$ f est strictement décroissante, et sur $]\alpha\,;+\infty[$ f est strictement croissante.

c. Dressons le tableau de variation de f.

x	0		α		+∞
g'(x)		−	0	+	
g(x)	+∞	↘	$-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$	↗	0

4. Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

(T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

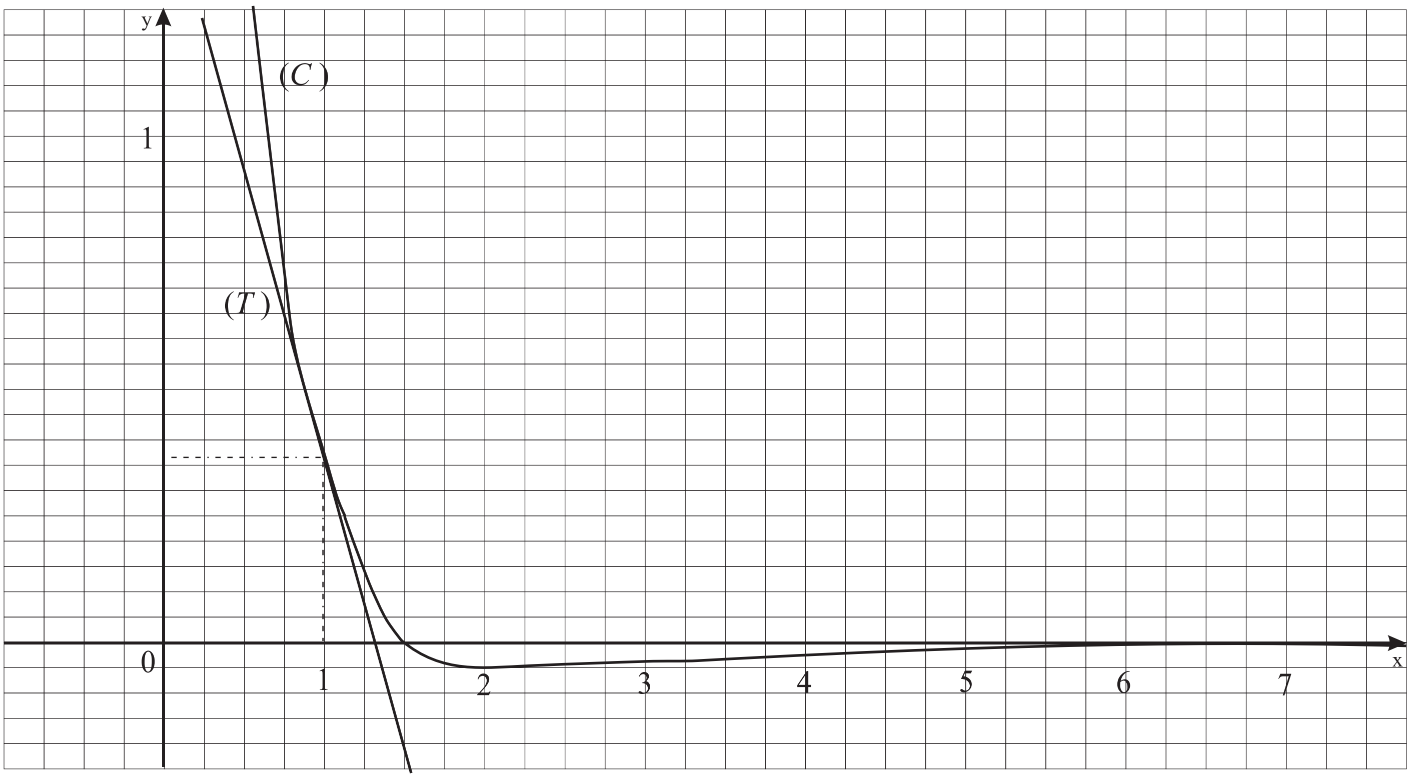
$f'(1) = \left(-\frac{1+2\times 1}{1^2} + \ln 1\right)e^{-1} = (-3+0)\frac{1}{e} = \frac{-3}{e}$

$f(1) = \left(\frac{1}{1} - \ln 1\right)e^{-1} = (1-0)\frac{1}{e} = \frac{1}{e}$

(T) : $y = \frac{-3}{e}(x-1) + \frac{1}{e} = \frac{-3}{e}x + \frac{3}{e} + \frac{1}{e} = \frac{-3}{e}x + \frac{4}{e}$

(T) : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

5. Construisons la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni d'un repère (O; I; J). On prendra $\alpha = 2{,}6$.



Partie C

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par $h(x) = e^{-x}\ln x$

Démontrons que h est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
En d'autres termes il s'agit de montrer que : h'(x) = f(x)

$$h'(x) = \left(e^{-x}\ln x\right)' = (e^{-x})' \text{ x } (\ln x) + (e^{-x}) \text{ x } (\ln x)'$$

$$h'(x) = (-e^{-x}) \text{ x } (\ln x) + (e^{-x}) \text{ x } \left(\frac{1}{x}\right) = (e^{-x}) \text{ x } \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$$

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)(e^{-x}) = f(x)$$ Donc h est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.

a. Calculons, en cm^2 et en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (*C*), (*OI*) et les droites d'équation x =3 et x = λ .

Sur $]3\,;+\infty[$, (*C*) est en dessous de (*OI*), donc $A(\lambda) = -\int_3^{\lambda}(f(x)-0)\,dx \cdot UA = -\int_3^{\lambda} f(x)\,dx \cdot UA$

avec $UA = 2\text{cm x } 10\text{cm} = 20\text{cm}^2$

$A(\lambda) = -\left[h(x)\right]_3^{\lambda}$ x 20cm^2 (car h est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$)

$$A(\lambda) = -\left[h(\lambda)-h(3)\right] \text{ x } 20\text{cm}^2 = -\left[e^{-\lambda}\ln\lambda - e^{-3}\ln 3\right] \text{ x } 20\text{cm}^2$$

$$A(\lambda) = -\left(\frac{1}{e^{\lambda}}\ln\lambda - \frac{1}{e^3}\ln 3\right) \text{ x } 20\text{cm}^2 = \left(\frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln\lambda}{e^{\lambda}}\right) \text{ x } 20\text{cm}^2$$

Calculons $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty}\left[\frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln\lambda}{e^{\lambda}}\right] \text{x } 20\text{cm}^2 = \frac{\ln 3}{e^3} \text{ x } 20\text{cm}^2$ car $\lim\limits_{\lambda \to +\infty}\frac{\ln\lambda}{e^{\lambda}} = 0$ (croissance comparée des fonctions lnx et e^x).