

BACCALAURÉAT
SESSION 2013

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra trois (03) feuilles de papier millimétré
Toute calculatrice scientifique est autorisée.*

EXERCICE 1 (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) , on désigne par K, A et B les points d'affixes respectives $z_1 = 2$, $z_2 = 4 + 2i$ et $z_3 = 2 + 4i$. L'unité graphique est 2 cm.

- 1-
 - a) Placer les points K, A et B .
 - b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.
- 2- On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B .
 - a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z - 2i$.
 - b) Déterminer les affixes respectives des points I' et J' , images respectives des points I et J puis placer I' et J' .
- 3- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude directe S .
- 4- Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1 ; 1)$ et de rayon 2.
 - a) Tracer (C) .
 - b) Déterminer le centre et le rayon de (C') , image de (C) par S .
 - c) Construire (C') .
- 5-
 - a) Déterminer puis construire l'image par S de la droite (IJ) .
On pourra caractériser l'image par S de la droite (IJ) par deux de ses points.
 - b) On désigne par E le point d'intersection de (C) et la droite (IJ) d'abscisse négative. Placer E et l'image E' de E par S . Justifier la position du point E' .

EXERCICE 2 (4,5 points)

On considère la suite numérique (u) définie par :

$$u_0 = \sqrt{2} \text{ et pour tout nombre entier naturel } n, u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2} u_n.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.

- 1- Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
- 2- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et de représentation graphique (D).
 - a) Tracer (D) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.
 - b) Placer u_0 sur l'axe (OI).
 - c) A l'aide de (D) et (Δ) , placer les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u) sur l'axe (OI).
- 3-
 - a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n \leq 4$.
 - b) Démontrer que la suite (u) est croissante.
 - c) En déduire que la suite (u) est convergente.
- 4- On considère la suite (v) définie par $v_n = u_n - 4$, pour tout nombre entier naturel n .
Démontrer que la suite (v) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 5- On pose, pour tout nombre entier naturel n :
 $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (v) ;
 $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (u) .
 - a) Déterminer une expression de T_n en fonction de n .
 - b) Justifier que : $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) + 4(n + 1)$.
 - c) Déterminer la limite de S_n .

PROBLEME (11,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité graphique est 2 cm.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $] -\infty ; 1[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1 - x)$.

On note (C) la courbe représentative de f .

- 1-
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique du résultat.
 - c) Calculer la limite de f à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.

- 2- a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty ; 1[$, calculer $f'(x)$.
 b) Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1[$.
 c) Dresser le tableau de variation de f .
- 3- a) Démontrer que l'équation (E) : $x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
 b) Justifier que $-0,7 < \alpha < -0,6$.
- 4- a) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :
 $y = -x - 1$.
 b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,3	-0,7	-1,2	-1,4	-1,8

Tracer (T) et (C).

On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$.

- 5- On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.
- a) Calculer $\int_{\alpha}^0 \ln(1-x) dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
 b) Démontrer que la valeur de $\mathcal{A}$ en unités d'aire est : $\mathcal{A} = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$.
 c) Déterminer en cm^2 l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de $\mathcal{A}$ pour $\alpha = -0,65$.
- 6- Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère (O, I, J).
- a) Calculer $f(-1)$.
 b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en $\ln 2$ existe puis le calculer.
 c) Construire la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse $\ln 2$ sur la figure de la question 4-b).