PREPA BAC D 2023 | DEVOIR N°2 DE MATHEMATIQUES | PREPA BAC D 2023

Exercice n°1

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si l'affirmation est fausse :

N°	AFFIRMATIONS
1	Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle K et x_0 un élément de K. Le point A d'abscisse x_0 est un point d'inflexion de la courbe de f si et seulement si la dérivée seconde de f s'annule en x_0.
2	Le coefficient de corrélation linéaire entre les caractères X et Y d'une série statistique double est le nombre réel r tel que : $r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$.
3	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. On a : mes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$.
4	Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Exercice n°2

Pour chaque énoncé, trois réponses A, B et C sont proposées et une seule est correcte.

Ecris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse :

N°	ENONCES	REPONSES	
1	A et B sont deux évènements incompatibles de l'univers Ω des éventualités d'une expérience aléatoire. La probabilité $P(A \cup B)$ est égale à :	A	$P(A) \times P(B)$
		B	$1 - P(A)$
		C	$P(A) + P(B)$
2	La fonction $F : x \mapsto \sin^3 x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :	A	$f(x) = cosx \sin^2 x$
		B	$f(x) = 3cosx \sin^2 x$
		C	$f(x) = -cosx \sin^2 x$
3	Le nombre complexe $z = -cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}$ a pour argument θ tel que :	A	$\theta = \frac{\pi}{6}$
		B	$\theta = \frac{5\pi}{6}$
		C	$\theta = -\frac{\pi}{6}$
4	Soit (V_n) une suite géométrique de premier terme $V_1 = 3$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. La somme S_n telle que $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ est :	A	$S_n = 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$
		B	$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$
		C	$S_n = 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

Devoir 2

Exercice n°3

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - \ln x$.

1. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
   On ne demande pas de calculer les limites de g.
2. Démontre que $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) \geq 1$.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x\ln x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 2 cm.

3. a) Démontre que f est continue à droite en 0.
   b) Etudie la dérivabilité de f à droite en 0. Interprète graphiquement le résultat.
4. Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement ces résultats.
5. a) Démontre que $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = 2[g(x) - 1]$.
   b) Déduis-en le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
   c) Trace la courbe (C).
6. a) À l'aide d'une intégration par parties, calcule $\int_1^e x\ln x\, dx$.
   b) Calcule l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe (OI) des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Exercice n°4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 1 cm.
Soit A_0, A_1 et A_2 les points d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4i$, $z_1 = -1 - 4i$ et $z_2 = -4 - i$.

1. Soit S la similitude directe telle que : $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.
   a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1-i}{2}z - \frac{3-i}{2}$.
   b) Déduis-en le rapport k, l'angle α et le centre $\Omega(\omega)$ de la similitude directe S.
   c) Soit M un point d'affixe z, distinct de Ω et M' le point d'affixe z', image par S de M. Vérifie la relation : $\omega - z' = i(z - z')$. Déduis-en la nature du triangle $\Omega MM'$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $A_{n+1} = S(A_n)$ et on pose : $U_n = A_nA_{n+1}$.
   a) Place les points A_0, A_1 et A_2 et construis géométriquement les points A_3, A_4 et A_5.
   b) Démontre que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme U_0 et la raison q.
   c) Exprime U_n en fonction de n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.
   a) Exprime L_n en fonction de n.
   b) Calcule $\lim_{n\to+\infty} L_n$.

Devoir n°2

Exercice n°5

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$.

1. Détermine la limite de $g(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = -4xe^{2x}$.
   b) Dresse le tableau de variation de g.
3. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
   b) Justifie que $0 < \alpha < 1$ et donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
4. Démontre que $\forall x \in]-\infty; \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + \left(\frac{1-x}{2}\right)e^{2x}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé. Unité graphique : 2 cm

1. a) Détermine la limite de $f(x)$ en $-\infty$.
   b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.
   c) Etudie la position relative de (C_f) et (D).
2. a) Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x}\left(e^{-2x} + \frac{1}{x} - 1\right)$.
   b) Déduis-en la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
3. a) Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2}g(x)$.
   b) Déduis-en le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
4. Trace la droite (D) et la courbe (C_f).

Exercice n°6

Le fondateur d'un établissement secondaire privé a recruté des enseignants. Il leur propose un salaire annuel de 750 000 FCFA. Après quelques mois de travail, les enseignants font une grève pour la revalorisation de leur salaire. Le fondateur, qui désire le bon fonctionnement de son établissement, fait deux propositions de contrat aux choix afin de relever les salaires.

- Le premier contrat stipule que chaque année, les enseignants auront une augmentation de 4% du salaire de l'année précédente.
- Le second contrat stipule que chaque année, les enseignants auront une augmentation forfaitaire de 30 000 FCFA sur le salaire de l'année précédente.

Monsieur Balo, professeur d'espagnol, voudrait s'engager pour 9 ans dans cet établissement mais il ne sait pas pour quel contrat opté. Il te sollicite.

À l'aide d'une production argumentée, détermine le contrat le plus avantageux pour Mr Balo.

Fomesoutra.com
ça soutra !

PREPA BAC D 2023 | DEVOIR N°1 DE MATHEMATIQUES | PREPA BAC D 2023

Exercice n°1

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si l'affirmation est fausse :

N°	AFFIRMATIONS
1	Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'' = -2y$ sont les fonctions f définies par $f(x) = Acos(2x) + Bsin(2x)$, où A et B sont des nombres réels.
2	Toute suite géométrique de raison q telle que $\|q\| < 1$ converge vers 0.
3	Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b sont deux éléments de K. Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b.
4	Soit z un nombre complexe non nul. L'écriture $z = r(cos\theta + isin\theta)$ est appelée forme trigonométrique de z.

Exercice n°2

Pour chaque énoncé, trois réponses A, B et C sont proposées et une seule est correcte.
Ecris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse :

N°	ENONCES	REPONSES	
1	A et B sont deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0,7$ et $P(B) = 0,2$. On a :	A	$P(A \cup B) = 0,9$
		B	$P(A \cap B) = 0,14$
		C	$P_A(B) = 0,5$
2	L'ensemble de validité V de l'équation $ln(x^2 - 1) = ln(x + 1) + ln(x - 1)$ est :	A	$V =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
		B	$V =]1; +\infty[$
		C	$V = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
3	La forme trigonométrique du nombre complexe $z = (1 + i)^4$ est :	A	$z = 4\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$
		B	$z = 4\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$
		C	$z = 4(cos\pi + isin\pi)$
4	Soit (U_n) une suite arithmétique telle que $U_5 = 26$ et $U_{15} = 56$. La raison r de la suite (U_n) est :	A	$r = 2$
		B	$r = 4$
		C	$r = 3$

D1

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^x, \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x - x\ln x \text{ , si } x > 0 \end{cases}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. a) Démontre que f est continue en 0.
   b) Démontre que f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = 2$.
   c) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Interprète graphiquement le résultat.
2. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.
   b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement ces résultats.
3. a) Démontre que f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.
   b) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = -\ln x$.
   c) Déduis-en les variations de sur $]0; +\infty[$.
4. Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. Trace (D) et (C_f).

Exercice n°4

Dans un magasin spécialisé en électroménager et multimédia, le responsable du rayon informatique fait le bilan sur les ventes d'ordinateurs portables, de tablettes et d'ordinateurs fixes. Pour ces trois types de produit, le rayon informatique propose une extension de garantie.

Le responsable constate que 28% des acheteurs ont opté pour une tablette, et 48% ont opté pour un ordinateur portable.

On admet que chaque client achète un seul produit entre ordinateur portable, tablette, ordinateur fixe et qu'il peut souscrire on non une extension de garantie.

- ✓ Parmi les clients ayant acquis une tablette, 5% ont souscrit une extension de garantie.
- ✓ Parmi les clients ayant acquis un ordinateur fixe, 12,5% ont souscrit une extension de garantie.

On choisit au hasard un de ces acheteurs et on note les évènements suivants :

- ✓ T l'évènement : « l'acheteur a choisi une tablette ».
- ✓ M l'évènement : « l'acheteur a choisi un ordinateur portable ».
- ✓ F l'évènement : « l'acheteur a choisi un ordinateur fixe ».
- ✓ G l'évènement : « l'acheteur a souscrit une extension de garantie ».

1. Calcule $P(F)$ et $P(F \cap G)$.
2. On sait de plus que 12% des acheteurs ont choisi un ordinateur portable avec une extension de garantie.
   Détermine la probabilité qu'un acheteur ayant acquis un ordinateur portable souscrive une extension de garantie.
3. Démontre que la probabilité de l'évènement G est égale 0,164.
4. Pour chaque appareil, l'extension de garantie est de 30 000 FCFA. Quelle recette complémentaire peut espérer le responsable du rayon lorsque 1000 appareils sont vendus ?

D1

Exercice n°5

1. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + V_n}{3} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} V_0 = 8 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}.$$

Calcule U_1 et V_1.

2. Soit (d_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = V_n - U_n$.
   a) Démontre que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme d_0 et la raison q.
   b) Exprime d_n en fonction de n et déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n > 0$.
   c) Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n$.
3. a) Démontre que, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} - U_n = \frac{d_n}{3}$ et $V_{n+1} - V_n = -\frac{d_n}{4}$.
   b) Déduis-en les variations des suites (U_n) et (V_n).
   c) Démontre que $U_0 \leq U_n \leq V_n \leq V_0$.
   c) Déduis-en que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes.
4. a) Exprime U_n en fonction de n. (On pourra utiliser la question 3. a)
   b) Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

Exercice n°6

Une maladie contagieuse s'est développée dans une région en début d'année 2023.

Après des études menées par les responsables sanitaires, on a constaté que le nombre de personnes atteintes par cette maladie x jours après l'apparition de celle-ci, est modélisé par la fonction g définie par : $g(x) = x^2 e^{\frac{x}{30}}$, où $0 \leq x \leq 30$.

Pour étudier les effets de cette maladie sur les populations de cette région et apporter les solutions adéquates en vue de l'éradiquer, les responsables sanitaires souhaitent connaître le nombre moyen μ de personnes contaminées sur les 30 premiers jours.

À l'aide d'une production argumentée, donne une réponse à leur préoccupation.

D_1