Ministère des Enseignements Secondaires **Classe : $T^{le}D$** **Coef : 4** **Durée : 4 heures**

Academic College of Excellence **Évaluation sommative** 2 : 9 **Novembre 2019**

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte deux exercices et un problème étalés sur deux pages numérotées de 1 à 2.

Exercice 1 [5 Points]

On considère le polynôme complexe P défini par $P(z) = iz^3 + iz^2 - (3+13i)z - 66 + 18i$

1. Chercher une racine imaginaire pure de P. **[0,75 pt]**
2. Déterminer trois nombres complexes $a; b$ et c tels que $P(z) = (z-3i)(az^2 + bz + c)$. **[0,75 pt]**
3. Calculer $(1+9i)^2$ **[0,5 pt]**
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $iz^2 - (3-i)z - 6 - 22i = 0$ et $P(z) = 0$. **[1 pt]**
5. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonornmé direct $(0; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points $A(-5-i)$; $B(3i)$; $C(4-2i)$ et $D(-6i)$.

   a) Placer ces points sur le repère **[0,5 pt]**

   b) Justifier la nature du triangle ABC. **[0,5 pt]**

   c) Démontrer que les points $A; B; C$ et D sont cocycliques et illustrer cette cocyclicité sur la figure précédente. **[1 pt]**

Exercice 2 [4 Points]

On considère le polynôme complexe Q défini par $Q(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$ et l'équation $(E) : 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2 = 0$.

1. Justifier que 0 n'est pas une solution de (E). **[0,25pt]**
2. Justifier que si z_0 est une solution de (E), alors $\overline{z_0}$ et $\dfrac{1}{z_0}$ sont aussi des solutions de (E). **[1pt]**
3. Montrer que $1+i$ est une solution de (E). **[1pt]**
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **[0,75pt]**
5. Déterminer l'écriture ccomplexe de la similitude directe S de centre $A(1-i)$ qui transforme $B(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)$ en $C(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)$. **[1pt]**

PROBLEME [11 Points]

PARTIE A [3 Points]

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. **[0,75pt]**

2. On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} \end{cases}$

   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \leq 4$. **[0,75pt]**

3. ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de côté $a > 0$. Soit A' le milieu du segment $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. Après avoir justifié que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe qui tansforme C en G et qui laisse invariant le point A. **[1,5pt]**

<u>PARTIE B</u> [**3 Points**]

On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - 3i$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. **[1pt]**
2. Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f^{-1}. **[0,5pt]**
3. Chercher l'expression analytique de f. **[0,5pt]**
4. Déterminer l'image de $A(2i)$ et l'antécédant de $B(-\sqrt{3} - 6i)$ par f. **[1pt]**

<u>PARTIE C</u> [**5 Points**]

On considère l'application g du plan dans lui-même dont l'expression analytique est $\begin{cases} x' = -2x + 2y - 9 \\ y' = -2x - 2y + 7 \end{cases}$

Soient (D) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 1 - i| = |\overline{z} - 2 - i|$ et (C) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|-iz + 1 + 3i| = 2\sqrt{2}$.

1. Déterminer l'écriture complexe de g. **[1pt]**
2. Chercher la nature et les éléments caractéristiques de g. **[1pt]**
3. Déduire la nature et les éléments caractéristiques de g^{-1}. **[0,5pt]**
4. Justifier que $(D) : -2x + 4y + 3 = 0$ et $(C) : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 8$. **[1,5pt]**
5. Déterminer une équation de (D') et (C'), images respectives de $(D) : -2x + 4y + 3 = 0$ et $(C) : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 8$ par g. **[1pt]**

Examinateur : NGUEFO Amour , ***PLEG mathématiques***

MINESEC
Collège Les Conquérants
B.P : 6182 Douala
Tél. : 674779860

COLCO

Année scolaire : 2019-2020
Département de Maths
Classe : Terminale D

Evaluation n°2

Epreuve de Mathématiques

Durée : 4h   Coef : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème tous obligatoires. Soyez précis, concis et propre.

EXERCICE1 : Suites numériques $(\mathbf{05,5}$ points$)$

Soit (u_n) une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$

1. Calculer les 4 premiers termes de cette suite. ***1pt***
2. Montrer par récurrence que :
   a) $\forall n \in \mathbb{N}$, (u_n) est croissante. ***0,75pt***
   b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$. ***0,75pt***
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. ***0,75pt***
4. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. ***0,75pt***
   b) Exprimer v_n en fonction de n. ***0,25pt***
   c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n. ***0,5pt***
   d) On pose $S_n = v_9 + v_{10} + \cdots + v_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de n, puis calculer la limite de S_n. ***0,75pt***

EXERCICE 2 : Limites et Continuités $(\mathbf{04,5}$ points$)$

1. Calculer les limites suivantes : ***1,5pt***
   a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-2x\right)$
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+3\sqrt{x-1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$
   c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$.
   a) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f. ***0,5pt***
   b) Etudier les branches infinies de la fonction f à $-\infty$ et à $+\infty$. ***1,5pt***
3. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4x+3} & si\ x < 1 \\ \frac{2x^2-5}{(x-2)^2} & si\ x \geq 1 \end{cases}$.
   a) Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction g. ***0,5pt***
   b) Etudier la continuité de g en $x_0 = 1$. ***1pt***

PROBLEME : Nombres Complexes (**10 points**)

PARTIE A : Etude trigonométrique

1. a) Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$. ***1pt***

   b) En déduire toutes les racines cinquièmes de $\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$. ***1,25pt***
2. Linéariser $\sin^2\alpha\cos^3(2\alpha)$. ***1,5pt***
3. Exprimer $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. ***0,75pt***

PARTIE B : Equations dans $\mathbb{C}$ - Nombres complexes et géométrie

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$. ***0,75pt***

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3-(5+i)z^2+(10+6i)z-8-16i$

2. Montrer que P admet une racine imaginaire pure. ***0,5pt***
3. Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $\mathrm{P}(z) = (z-2i)(z^2+az+b)$ ***0,5pt***
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$ ***0,75pt***
5. Soient trois points du plan $A, B\ et\ C$ d'affixes respectives : $z_A = 3+i$; $z_B = 2i\ et$ $z_C = 2-2i$.
   a) Placer les points $A, B\ et\ C$ sachant que le plan est rapporté au repère orthonormé $(0,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. ***0,75pt***
   b) Calculer : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ et les distances $AB\ et\ AC$ ***0,75pt***
   c) En déduire la nature exacte du triangle ABC. ***0,25pt***
6. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme et placer D sur la figure précédente. ***0,75pt***
7. On note R la rotation de centre A telle que $R(B) = C$. Déterminer l'angle de R et donner l'écriture complexe de R. ***0,5pt***

COLLEGE INTAC
B.P. : 1973 Douala
Tél. : 33 40 17 63

Département de Mathématiques
Année scolaire 2019/2020
Evaluation harmonisée sommative 2
Classe $T^{le}D$ Durée : 4h Cœff : 4

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux (02) pages. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 5pts

Les questions 1.) ; 2.) et 3.) de cet exercice sont indépendantes.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode de Gauss le système suivant. S_1 : $\begin{cases} 4x+y+3z=295 \\ 2x+z=110 \\ 3x+5y+4z=390 \end{cases}$ **1pt**

   b) En déduire dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble solution du système S_2 : $\begin{cases} 4x^2+|y-1|+\dfrac{3}{z+1}=295 \\ 2x^2+\dfrac{1}{z+1}=110 \\ 3x^2+5|y-1|+\dfrac{4}{z+1}=390 \end{cases}$ **1pt**

   c) On désire constituer un mélange nutritif pour bestiaux à partir de trois produits A, B et C dont la teneur en sucre, protéines et féculents est donnée ci-dessous :

	Sucre	Protéines	Féculents
A	40%	20%	30%
B	10%	0%	50%
C	30%	10%	40%

   Le mélange doit contenir 295 g de sucre, 110g de protéines et 390 g de féculents par kg. Quelle quantité de chacun des produits A, B et C doit-on utiliser ? **1pt**

2.) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x+1}}$ **0.75pt**

3.) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{1}{4-\sin x}$.

   a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{5}\leq h(x)\leq\dfrac{1}{3}$. **0.5pt**

   b) En déduire le calcul des limites suivantes. **0.25+0.5pt**

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{4-\sin x}$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-\sin x}{x^2+1}$

Exercice 2 4pts

Soient (u_n), et (t_n), $(n\in\mathbb{N})$ les suites numériques définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}= -\dfrac{1}{2}u_n^2+3u_n-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ et $t_n=u_n-3$

1.) Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles de u_1 et u_2. **0.5pt**

2.) Montrer que, pour tout entier naturel n, $t_{n+1}=-\dfrac{1}{2}t_n^2$ **0.5pt**

3.) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1\leq t_n\leq 0$. **1pt**

4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $t_{n+1}-t_n=-t_n\left(\dfrac{1}{2}t_n+1\right)$ **0.25pt**

   b) En déduire le sens de variation de la suite (t_n). **0.5pt**

5. a) Justifier que la suite (t_n) converge et calculer sa limite. **0.75pt**

   b) En déduire la limite de la suite (u_n). **0.5pt**

Problème 11 pts

Le problème comporte trois (03) parties I/, II/ et III/.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(o; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 1 cm.

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = -1 - i, \quad z_B = 2 - 4i, \quad z_C = 5 - i, \quad \text{et } z_D = 2 + 2i.$$

I :/

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) définie par :

$$(E :)\ z^3(-3 + 5i)z^2 - (4 + 8i)z + 12 - 4i = 0.$$

1.) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera. **0.5pt**

2.) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$z^3(-3 + 5i)z^2 - (4 + 8i)z + 12 - 4i = (z - 2)(z^2 + az + b)$$ **0.75pt**

3. a) Vérifier que $(3 - 3i)^2 = -18i$. **0.25pt**

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **1pt**

4. a) Calculer sous forme algébrique les rapports $\dfrac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$ et $\dfrac{z_D - z_A}{z_D - z_C}$. **1pt**

b) Déduire la nature exacte des triangles ABC et ADC. **0.5pt**

c) Déduire que les points A, B, C et D sont cocycliques puis, déterminer le rayon et les coordonnées du centre du cercle $(\mathcal{C})$ circonscrit au quadrilatère ABCD (On désignera par E son centre) **0.75pt**

d) Placer les points A, B, C, D et E dans le plan puis, tracer le cercle $(\mathcal{C})$. **1pt**

II :/

Soit f la similitude directe qui laisse B invariant et qui transforme C en A.

1. a) Déterminer le centre de la similitude f. **0.25pt**

b) Déterminer l'argument principal et le rapport de la similitude f. **0.75pt**

2. a) Donner l'écriture complexe de la similitude f. **0.5pt**

b) Déterminer les caractéristiques (centre et rayon) du cercle $(\mathcal{C}')$ image du cercle $(\mathcal{C})$ de centre E d'affixe $2 - i$ et de rayon 3 par la similitude f. **0.5pt**

c) Donner une équation cartésienne de la droite (D') image de la dtoite (D) : $2x - y = 1$ par f. **0.5pt**

III :/

Soit g la transformation du plan qui a tout point M d'affise z associe le point M' d'affixe Z tel que $Z = \dfrac{z + 1}{z + i}$.

On considère les points G et H d'affixes respectives $z_G = -1$ et $z_H = -i$.

1) a) Déterminer sous forme algébrique les racines carrées du nombre complexe $4 - 2i$ **0.75pt**

b) En déduire l'ensemble des points invariants par g. **0.5pt**

2) On pose $z = x + iy$.

a) Exprimer en fonction de x et y les parties réelles et imaginaires de Z. **0.75pt**

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tel que Z soit réel. **0.5pt**

c) Déterminer l'ensemble (D) des points M du plan d'affixe z tel que $|Z| = 1$. **0.25pt**

Collège de la Retraite

Département de Mathématiques OK

Classes : Tles D

Année scolaire : 2019-2020

Épreuve : Mathématiques

Durée : 4H, **Coef** : 4

Mini session : Novembre 2019

Cette épreuve est constituée de deux exercices et d'un problème étalés sur deux pages numérotées 1 et 2. Présentation très appréciée.

Exercice 1 : 6points

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{2U_n - 16}{U_n - 6}$.

I. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{2x-16}{x-6}$. (C_h) la courbe représentative de h dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer la courbe de (C_h). **1pt**
2. Représenter sur l'axe (OI) les quatre premiers termes de la suite (U_n) **0,5pt**
3. Montrer par récurrence que la suite (U_n) est croissante. **0,75pt**
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \leq 4$. **0,5pt**
5. En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite **0,75pt**

II. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $V_n = \frac{1}{U_n - 4}$.

1. Montrer que la suite (V_n) est arithmétique. Préciser son premier terme **1pt**
2. Exprimer V_n et U_n en fonction de n. **1pt**
3. En déduire la limite de la suite (U_n) **0,5pt**

Exercice 2 : 3points

1. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 3x-2y-7z=0 \\ 6x-5y-11z=0 \end{cases}$ **1,5pt**
2. Un homme, sa femme et leur fils ont au total 100 ans. Dans n années, l'homme aura la somme des âges de sa femme et du fils. Il y a n années, la femme avait le quadruple de l'âge du fils et l'homme était 6 fois plus âgé que l'enfant. Déterminer les âges actuels de ces trois personnes. **1,5pt**

Problème : 11points

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B

Partie A : Répondre par vrai ou faux. On ne demande pas de justifier votre réponse **0,5pt $\times$ 6**

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, On considère l'application f du plan dans lui-même, d'expression analytique $\begin{cases} x' = -x - \sqrt{3}y + 4 \\ y' = \sqrt{3}x - y - 1 \end{cases}$ ainsi que les points A et B d'affixes respectives i et $\sqrt{3} - i$. A' l'image de A par f.

   a) f a pour écriture complexe $z' = (-1 + i\sqrt{3})z + 4 - i.$

   b) L'image de la droite (AB) est la droite par f d'équation $5x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3} - 20 = 0.$

   c) L'ensemble des points M du plan tels que $|z - i| = |z - \sqrt{3} + i|$ est le cercle de diamètre $[AB]$

   d) L'image par f du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ est le cercle de centre A' et de rayon $\sqrt{2}$

2. (U_n) est une suite numérique définie pour tout entier naturel n, M est un nombre réel.

   a) Si pour tout entier naturel non nul n, $U_n \leq \frac{1}{n^2}$ alors la suite (U_n) converge vers 0

   b) Si la suite (U_n) croissante et majorée par M elle converge vers M.

Partie B :

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 6z^2 + 12z - 16=$ (où z est un nombre complexe.

   a. Montrer que (E) admet une solution réelle z_0 . **0,5pt**

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **1pt**

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives 4, $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$

   a. Représenter A, B et C. **1pt**

   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral **1pt**

3. Soit K le point d'affixe $-\sqrt{3} + i.$ F l'image de K par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation t de vecteur $\overrightarrow{OB}$

   a. Déterminer les écritures complexes de la rotation r et de la translation t **1pt**

   b. Quelles sont les affixes respectives de F et de G **1pt**

   c. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires **1pt**

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

   a. Calculer l'affixe de H. **0,5pt**

   b. Montrer que COFH est un carré. **1pt**

INSTITUT JEAN PAUL II	**EPREUVE DE MATHEMATIQUES SEQUENCE N°2**	**ANNEE SCOLAIRE 2019-2020**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES		**CLASSE : Tle D**
		DUREE : 4H
Examinateur : M SECK SECK		**COEF : 4**

EXERCICE1 4,5PTS

I-) Etudier la limite en $+\infty$ de chacune de: $g : x \mapsto 2 + x - \sqrt{2x^2+1}$ $\quad h : x \mapsto \dfrac{1-3x}{x+\sqrt{4x^2+1}}$ 1,5pt

II-) Soit la fonction $\begin{array}{l} f : IR \to IR \\ x \mapsto x^2 - x\sqrt{x} - 2 \end{array}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites au bornes de D_f. 0,25p

2) On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Démontrer que $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}\left(4\sqrt{x}-3\right)}{2}$. 0,5pt

En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations. 0,75pt

3) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0\,;+\infty[$ une solution unique β. 1pt

4) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. 0.5pt

EXERCICE2 5PTS

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm. On désigne par i le nombre complexe demodule 1 et d'argument $+\dfrac{\pi}{2}$. On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\dfrac{z-4}{z} = i$. Écrire la solution sous forme algébrique. 0,5pt

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle. 1pt

3. Soient *A*, *B*, *A'* et *D* les points du plan complexe d'affixes respectives : $a = 2$, $b = 4$, $a' = 2i$ et $d = 2 + 2i$.
Quelle est la nature du triangle *ODB* ? 0,5pt

4. Soient *E* et *F* les points d'affixes respectives $e = 1 - i\sqrt{3}$ et $f = 1 + i\sqrt{3}$. Quelle est la nature du quadrilatère *OEAF* ? 0,5pt

5. Soit C le cercle de centre *A* et de rayon 2. Soit C' le cercle de centre *A'* et de rayon 2. Soit *r* la rotation de centre *O* et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

a. On désigne par *E'* l'image par la rotation *r* du point *E*. Calculer l'affixe *e'* du point *E'*. 0,5pt

b. Démontrer que le point *E'* est un point du cercle C'. 0,5pt

c. Vérifier que : $e - d = \left(\sqrt{3}+2\right)\left(e' - d\right)$. En déduire que les points *E*, *E'* et *D* sont alignés. 0,75pt

6. Soit *D'* l'image du point *D* par la rotation *r*. Démontrer que le triangle *EE'D'* est rectangle. 0,75pt

PROBLEME 10,5PTS

1. Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = x^3 - 3x - 3$

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations. On y précisera les limites. 1.5pt

b) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Justifier que $2,1 < \alpha < 2,11$. 1pt

2. Soit la fonction f définie et dérivable sur $IR - \{-1\,;1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.

a) Montrer que pour tout $x \in IR - \{-1\,;1\}$, $f'(x) = g(x) \times h(x)$ où h est une fonction à préciser. 0,75pt

b) En déduire les variations de f. 0,5pt

c) Etudier les limites de f aux bornes de D_f 1,5pt

d) Dresser le tableau de variation de f. 0,5pt

3.

a) Déterminer trois réels a, b, c tels que $f(x) = ax + \dfrac{bx + c}{x^2 - 1}$ 0,5pt

b) En déduire que (C_f) admet en $-\infty$ et $+\infty$ une asymptote (Δ) dont on précisera une équation. 0,5pt

c) Etudier la position de (C_f) par rapport à (Δ). 0. 5pt

5. Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha$. 0.5pt

6.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty\,;-1[$ une solution unique β.

Déterminer un encadrement de β d'amplitude 0,1. 1pt

b) Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x. 0.25pt

7. Tracer (C_f), (Δ) et les autres asymptote dans un même repère orthonormé d'unité 1 cm. 1.5pt

Epreuve de Mathématique du 07 Novembre 2019 (20pts) Coef : 5

Exercice (4pts)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f(1)=0$, $\lim_{0^+} f(x)=-\infty$, $\lim_{+\infty} f(x)=+\infty$.

1. Calculer la dérivée seconde de f etdéduire la position de f par rapport à toutes ses tangentes. (0,5pt)
2. Donner les variations de f et dresser son tableau de variation. (0,5pt)
3. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse $x_0=1$. (0,5pt)
4. On suppose que f est bijective. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.
   a) Dresser le tableau de variation de f^{-1}. (0,25pt)
   b) Calculer $(f^{-1})'(0)$ puis déduire l'équation de la tangente (T') à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse $x_1=0$. (0,75pt)
5. Tracer dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, les courbes de f et f^{-1} ainsi que les tangentes (T) et (T'). (1,5pt)

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonrmé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A, B, D et E d'affixes respectives $z_A=2+2i$, $z_B=2-2i$, $z_D=4$ et $z_E=1-i\sqrt{3}$.

1. Placer les points A, B et D dans le plan. (1pt)
2. On pose $z=\frac{z_A}{z_E}$.
   a) Donner la forme algébrique et celle trigonométrique de z. (1pt)
   b) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$. (0,5pt)
3. Calculer le rapport $\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}$ et déduire la nature du triangle DAB. (0,75pt)
4. Déterminer l'écriture complexe de la similitude de centre D qui transforme A en B. (0,5pt)
5. On donne les équations suivantes : E_1 $z^2-4z+8=0$, E_2 $iz^2+z-3+i=0$ et le polynôme $P(z)=z^4-4z^3+12z^2-16z+32$.
   a) Résoudre E_1 et E_2 dans $\mathbb{C}$. (1pt)
   b) Comparer $\overline{P(z)}$ et $P(\bar{z})$
   c) Calculer $P(i)$ et $P(2i)$. (0,5pt)
   d) Déduire deux solutions de $P(z)=0$. (0,5pt)
   e) Mettre $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes de second degré. (0,75pt)
   f) Résoudre $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$. (0,5pt)

Problème (8,5pts) Les parties A et B sont indépendantes. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Partie A (3pts)

Soit la fonction numérique f définie par : pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}$.

1. Calculer les fonctions dérivées successives $f'f''f'''$ et $f^{(4)}$. (1pt)
2. Dresser successivement les tableaux de variations de $f'''f''f'$ et f. (1pt)
3. En déduire que $\forall x\in]0:1], 1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. (1pt)

Partie B (5,5pts)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité des axes : $1cm$ sur l'axe (Ox) et $2mm$ sur l'axe (Oy)).
Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-32\sqrt{x}+31$ et C_f sa courbe représentative.

1. Dresser le tableau de variation de f. (1pt)
2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions, l'une entière et l'autre notée α, dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près. (1pt)
3. On donne la fonction $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{64}{3}x\sqrt{x}+31x$.
   a) Montrer que $F'(x)=f(x)$ où F' désigne la drivée de la fonction F. (0,5pt)

b) Justifier que $\forall t \in [7,5;\alpha]$, $f(7,5) \leq f(t) \leq 0$. (0,5pt)

c) Montrer en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis que :
$|F(\alpha) - F(7,5)| \leq 4 \times 10^{-1}(\alpha - 7,5)$. (0,5pt)

d) En déduire une valeur approchée à 4×10^{-2} près de $F(\alpha)$. (0,5pt)

4. Exprimer en fonction de α l'aire de la partie délimitée par la courbe, l'axe des abscisses, les droites déquation $x = 1$ et $x = \alpha$. (1pt)
5. Donner une approximation de cette aire à 4×10^{-2} près. (0,5pt)

Exercice 1 **(5 points)**

1. Déterminer pour chacune des fonctions suivantes ses primitives sur $\mathbb{R}$.
   (a) $f(x) = x^2(-2x^3+1)^3$ **(0.5 pt)**
   (b) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **(0.5 pt)**
   (c) $k(x) = sint cos^3 t$ **(0.5 pt)**
   (d) $l(x) = -2xcos(x^2+1)$ **(0.5 pt)**
2. On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$.
   (a) Détermine deux réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+1)^2}$. **(0.5 pt)**
   (b) Déterminer les primitives de f sur $]-1;1[$. **(0.5 pt)**
   (c) Déterminer la primitive F de f sur $]-1;1[$ qui s'annule en 0. **(0.5 pt)**
   (d) Linéariser $sin^3 x$, puis déduire ces primitives sur $\mathbb{R}$. **(1.5 pt)**

Exercice 2 **(5,5 points)**

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $z = -8+6i$. **(1 pt)**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2-(3+5i)z-2+6i=0$. **(1 pt)**
3. Pour tout nombre z, on pose $f(z) = Z^3-(3+7i)z^2-12(1-i)z+12+4i$.
   (a) Montrer qu'il existe un nombre imaginaire pur z_0 tel que $f(z_0)=0$. **(0.5 pt)**
   (b) Déterminer les complexes a et b tels que : $f(z) = (z-2i)(z^2+az+b)$. **(0.5 pt)**
   (c) Déduire les solutions de l'équation $f(z)=0$. **(0.5 pt)**
4. Soient les points A, B et C, d'affixes respectives : $Z_A = 2i$, $z_B = 1+i$ et $z_C = 2+4i$.
   (a) Calculer le module et un argument du complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - Z_A}$. **(0.5 pt)**
   (b) En déduire la nature du triangle ABC. **(0.5 pt)**
   (c) En déduire le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. **(1 pt)**

Problème **(10.5 points)**
Le Problème comporte deux parties A et B indépendantes.
Partie A **(6 points)**

1. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.
   (a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $]1;+\infty[$. **(0.5 pt)**
   (b) Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur $]1+\infty[$. **(0.5 pt)**
   (c) Étudier la fonction f (sens de variation , limites aux bornes, tableau de variation) **(1 pt)**
   (d) Énoncé le théorème des valeurs intermédiaires. **(0.5 pt)**
   (e) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$ **(0.5 pt)**
2. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   (a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ à même ensemble solution que l'équation $f(x)=0$. **(0.5 pt)**

(b) Montrer que si $x \in]1;2[$, alors $g(x) \in]1;2[$. **(0.5 pt)**

(c) Justifier que g est dérivable sur $]0;+\infty[$, calculer sa dérivée g' **(0.5 pt)**
et montrer que $\forall x \in]1;2[; |g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. **(1 pt)**

(d) En déduire que $\forall x \in]1;2[; |g(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$ **(1 pt)**

<u>Partie B</u> (3,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2cm$. A, B, C les points d'affixes respectives $Z_A = 1 + i$, $Z_B = \overline{z_A}$, $Z_C = i\sqrt{2}$ et $z_D = \overline{z_C}$.

1. Placer les points dans le repère. **(0.5 pt)**
2. Montrer que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon. **(1 pt)**
3. Déterminer le point F pour que $ABCF$ soit un parallélogramme. **(0.5 pt)**
4. Déterminer l'affixe du point E image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ **(0.75 pt)**
5. Déterminer l'affixe du point H image de B par l'homothétie de centre O et rapport 2. **(0.75 pt)**

MINESEC
LYCEE DE BATIE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Evaluation N° 2 2019/2020
Classe : T^{le} D
Durée : 4heures / coef : 4

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : (6points)

1. On pose $Z = \dfrac{z+2-i}{z-4i}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ *et* $z \neq 4i$.
   a) On pose $z = x+iy$ déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y. **0,75 pt**
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points M tel que Z soit un imaginaire pur. **0,5 pt**
2. On donne $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ *et* $z_2 = 1-i$.
   a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 *et* z_2 **1 pt**
   b) Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme algébrique le nombre $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$. **1 pt**
   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{12}$. **0,5 pt**
3. On désigne par f l'application qui à tout point M du plan d'affixe $z = x+iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x'+iy'$ tel que : $z' = \left(-1+\sqrt{3}i\right)z - 2\sqrt{3} - 4i$.
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f. **1 pt**
   b) Donner l'expression analytique de f. **0,75 pt**
   c) Quelle est l'image par f d'un point A d'affixe $1-2i$? **0,5 pt**

Exercice 2 : (3 points)

Soit la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

1) Etudier les variations de f.

2) Sans résoudre l'équation, montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution α appartenant à [1 ; 2].

3) Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ sur [1 ; 2].

4) En déduire que $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x-\alpha|$, $\forall x \in [1; 2]$.

<u>Problème</u> (11points)

NB : Seules les parties A et B sont dépendantes

<u>Partie A</u>

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1. **1)** Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation **1,5pt**
2. **2)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$ et déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près. **1,5pt**
3. **3)** Donner le signe de $g(x)$ **0,5pt**

<u>Partie B</u>

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$

1) Donner le domaine de définition de f **0,5pt**
2) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition **1pt**
3) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ puis étudier les variations de f **1,5pt**
4) Dresser le tableau de variation de f **0,75pt**
5) Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ **0,75pt**
6) Etudier les branches infinies de f **0,5pt**
7) Construire la courbe de f et ses différentes asymptotes **1pt**

<u>Partie C</u>

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\ vers\ \mathbb{R}\ par\ f(x) = \tan x$

1) f est-elle bijective ? **0,5pt**
2) $determiner\ (f^{-1})'(x)$ **1pt**

Ministère des enseignements secondaires **Trimestre 1:** Novembre 2019.
Lycée bilingue SIN de Foumban **Classe:** Tle D. **Durée:** 4 heures. **Coeff:** 4.
Département de mathématiques **Par: EFOUBA EKASSI R.**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème à deux parties

Exercice 1: /2,75 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, avec le méthode du pivot de Gauss, le système: [1pt]

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \\ 6x - 5y - 11z = 0 \end{cases}$$

2. Un homme, sa femme et son fils ont au total 100 ans. Dans n années, l'homme aura la somme des âges de son fils et de sa femme. Il y a n années la femme avait le quadruple de l'âge du fils et l'homme était 6 fois plus âgé que son fils.
   (a) Montrer que la résolution de ce problème revient à résoudre le système (S). [1pt]
   (b) En déduire les âges du l'homme, de sa femme et de son fils. [0,75pt]

Exercice 2: /6,25 points

On considère les points A, B et C d'affixe respectives $2 + i$, $3 - 5i$ et -4. D est le symétrique de A par rapport à la droite (BC) et I est le milieu de $[BC]$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A. [0,5pt]
2. Faire une figure qui représente les points A, B, C, I et D. [1pt]
3. Quel est la position de I par rapport à $[AD]$? [0,25pt]
4. Déterminer les affixes des points I et D. [1pt]
5. Déterminer géométriquement les ensembles des points $M(z)$ suivants:
   (a) $|2z + 1 + 5i| = 4$ [0,5pt]
   (b) $|z + 3 + 6i| = |z - 2 - i|$ [0,5pt]
6. Soient h l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{-1}{4}$ et s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$. On pose $E = h(B)$ et $F = s(C)$.
   (a) Déterminer les écritures complexes de h et s. [1pt]
   (b) En déduire les affixes des points E et F. [1pt]
   (c) Montrer que les points F, A et B sont alignés. [0,5pt]

Problème: /11 points

Partie A: /7 points

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. [0,5pt]
2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations. [2pts]
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$. [0,5pt]
4. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près. [0,75pt]

5. Étudier les branches infinies de g en $-\infty$ et en $+\infty$. [1,25pt]

6. Écrire une équation de la tangente (T) à (C_g) en $x_0 = 0$ [0,75pt]

7. Tracer la courbe de g dans un repère orthonormé (O, I, J) [1,25pt]

Partie B: /4 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

1. (a) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$. [0,75pt]
   (b) En déduire la primitive F de f qui prend la valeur -2 en 0. [0,75pt]

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet α comme unique solution sur $\mathbb{R}$ [0,5pt]

3. On considère l'intervalle $I = [-1; 0]$.

   (a) Montrer que $\forall x \in I$, $|f'(x)| < \dfrac{1}{2}$. [0,75pt]

   (b) En déduire que $\forall x \in I$, $|f(x) - \alpha| < \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$ [0,75pt]

4. Comparer $f(x)$ et x suivant les valeurs de x. (On pourra utiliser le signe de $g(x)$) [0,5pt]

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
DELEGATION REGIONALE DE L'OUEST
DELEGATION DEPARTEMENTALE DE LA MIFI
LYCEE BILINGUE DE TOKET II
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Evaluation : **CC N°2**
Épreuve : **Mathématiques**
Durée : **04H** Classe : **T^le^D** Coef : **4**
Date : **12 NOVEMBRE 2019**

Instructions : *l'épreuve comporte quatre exercices indépendants et un problème le candidat traitera obligatoirement chacun de ces exercices et le problème; le soin apporté à la rédaction sera un élément important d'appréciation !*

Exercice 1 (0,75×3=2,25 Points)

On considère le polynôme complexe P défini par :

$P(z) = z^4 - (1+4i)z^3 + (-1+5i)z^2 - (4+16i)z - 20 + 20i$

1) Démontrer que P admet deux racines imaginaires pures dont-on déterminera.
2) Déterminer deux nombres complexe a et b tel que $P(z) = (z^2+4)(z^2+az+b)$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0.

Exercice 2. (0,75+0,75+0,5+0,5+0,5+1=4POINTS)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + 2$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer les images par f de $[-1;3[$; $[2;+\infty[$, $\mathbb{R}$
3. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{7}{4}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

4.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0;2]$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution de cette équation qui est dans $[0;2]$.

5. Soit g la restriction de f à $]-\infty;-\frac{1}{2}[$.
Montrer que g est une bijection de $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ vers un intervalle J que l'on précisera. Puis, dresser le tableau de variation de la bijection réciproque g^{-1}.

EXERCICE 3 (0,5+0,75+1,5+0,25+0,75=3,75POINTS)

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty;1]$ par $g(x) = \sqrt{1-x}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a : $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2}$ (où g' est la fonction dérivée de g)
2. En appliquant les inégalités des accroissements finis, déduire de 1) que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a : $1 - \frac{x}{2} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$
3. Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{1+x}-1})$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{4Sin(x)+3x}{x-1})$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3x-1} - 2x)$

Remarque : On pourra utiliser la règle de l'hôpital pour le a) ; le théorème des gendarmes pour le b) et l'expression conjuguée pour le c).

4. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}$.

a) Donner le domaine de définition de f

b) Démontrer que f est prolongeable par continuité en x = 2 et déterminer ce prolongement.

EXERCICE 4 (0,5×6= 3 POINTS)

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ $par\ f(x) = \frac{5x^3+4x}{(3x-2)^2}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = sin^3(x)cos^4(x)$

1) Déterminer trois réels a, b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(3x-2)^2}$
2) Déduire alors toutes les primitives de f sur $[1;+\infty[$;
3) Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.
4) Démontrer que $g(x) = sinx(cos^4(x) - cos^6(x))$ pour tout réel x.
5) Déterminer alors toutes les primitives de g sur $\mathbb{R}$.
6) Déterminer la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur $\sqrt{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

PROBLEME (Deux parties indépendantes)

PARTIE A/ (0,75+0,5=1,25 POINT)

Soit f la fonction qui, à tout réel x de l'intervalle $I = [0, 1]$, associe le nombre réel $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur I. Quel est l'ensemble de définition de f^{-1} ?

2) La fonction f^{-1} est-elle dérivable sur I ? Si oui, déterminer sa fonction dérivée $(f^{-1})'$.

PARTIE B/ (0,5+ 1+ 0,5+0,5+0,5+1+0,5+0,5+1= 6POINTS)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3x - 4$.

1) Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3) En déduire le signe de $g(x)$.

4) On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$. Déterminer la dérivée $f'(x)$ de f.

5) Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]1; +\infty[$.

6) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Dresser le tableau de variation de f. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$.

7) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe C_f représentative de la fonction f en $+\infty$.

8) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

9) Tracer le courbe C_f de f dans un répere orthonormé.

Proposée par M.SOB NGUEGANG

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve est sur deux pages, deux exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin apporté aux tracés des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

Exercice 1(4 points)

1. On considère h la transformation du plan qui à tout $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ y' = x\sqrt{3} + y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Soient z et z' les affixes respectifs des points M et M'.
   a) Écrire z' en fonction de z. **(1pt)**
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h **(1pt)**
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (z_n) par : $\begin{cases} z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})z_n \end{cases}$ Soit M_n le point d'affixe z_n, on pose $r_n = |z_n|$ et $\beta_n = Arg(z_n)$ ainsi on a $z_n = r_n e^{i\beta_n}$
   a) Écrire z_0 et z_1 sous forme exponentielle. **(1pt)**
   b) Déterminer les racines cubiques de z_1 . **(1pt)**

Exercice 2 (05,5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : **(3pts)**
   $ln(3x+1) = ln(2x-1)$; $ln(x+1) + ln(x-1) = ln(3x+5)$; $ln(1-x) - ln(2x+3) > ln(-x)$; $ln(3-x) \leq 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2ln(xy) = 58 \\ ln(x^{36})ln(y^4) = 14400 \end{cases}$ **(0,75pt)**
3. Déterminer les primitives de la fonction suivante sur l'intervalle I .
   $k(x) = \frac{(x+1)}{(x^2+2x+5)} + x$, $I = \mathbb{R}$. **(0,5pt)**
4. Soit l la fonction définie sur $\mathbb{R} - (-1/2)$ par $l(x) = \frac{(3x+1)}{(2x^2+x)}$.
   a) Déterminer les réels a et b tels que $l(x) = \frac{a}{(2x+1)} + \frac{b}{x}$. **(0,5pt)**
   b) En déduire la primitive de l sur $]-1/2; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1. **(0,75pt)**

Problème (10,5 points)

Le problème comporte trois parties A, B et C. Le plan est muni du repère orthonormé (O,I, J), (unité 1cm). On désigne par I l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie A (03 ,5 points)
Soit g une fonction définie sur I par $g(x) = x^2 - 2(1 - lnx)$.

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$. **(0,5pt)**
2. **a)** Justifier que g est continue et dérivable sur I et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in I$.**(0,75pt)**
   b) Déduire les variations de g et dresser son tableau de variation. **(0,75pt)**
3. **a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1,2;1,3[$. **(0,75pt)**
   b)En déduire le signe de g sur I. **(0,75pt)**

Partie B (05,75 points)
On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = x - 2 - \frac{2lnx}{x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative.

1. **a)** Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$. En déduire que (C) admet une asymptote verticale dont on précisera une équation. **(0,75pt)**
   b) Montrer que f est continue et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. **(1pt)**
   c) Déduire les variations et dresser le tableau de variation de f. **(0,75pt)**
2. **a)** Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique a la courbe (C). **(0,5pt)**
   b) Étudier les positions relatives de (C) et (D). **(0,75pt)**
3. Écrire une équation de (T) en $x_0 = 1$ **(0,5pt)**
4. Construire (C) et ses asymptotes. **(1,5pts)**

NB : Utiliser la valeur approchée de α pour construire (C).

Partie C (01,25 point)
On considère la fonction h définie sur I par $h(x) = \frac{1}{2}[x^2 - 4x - 2(lnx)^2]$.

1. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in I$. **(0,5pt)**
2. En déduire la primitive F de f sur I qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ en 1. **(0,75pt)**

Bonus Question : bilingual game

We consider in the complex plane the points $A(2 - 2i\sqrt{3})$, $B(2 + 2i\sqrt{3})$ and $C(8)$. Let S is the direct similarity defined by $S(A) = B$ and $S(C) = C$. Determine the complex expression of S and give its characteristic elements. **[1pt]**

LYCEE GENERAL LECLERC

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Année scolaire : 2019/2020
Contrôle du 04/11/2019
Classe : TD Durée : 4h

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : 2,5points

1 – Résoudre dans IR^3 le système $\begin{cases} x + y + z = 36000 \\ x - 3z = 0 \\ x - y - 6000 = 0 \end{cases}$ **1pt**

2 – Pour préparer les fêtes de fin d'année, Tamo achète un pantalon à son fils Ondoa, un tissu à sa fille Ndélé et une paire de chaussures à son fils Abessolo. Le pantalon a coûté trois fois plus cher que les chaussures, le tissu a coûté 6 000 FCFA de moins que le pantalon. Calculer le prix d'achat de chaque article sachant que Tamo a dépensé 36 000 FCFA pour satisfaire ses enfants. **1,5pts**

Exercice 2 : (7,5points)

I – Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants : $u = (2 + i)(1-i) - (3 - 2i)^2 + (5 - i)(5 + i)$; $v = (2 + i)^4$ **0,75x2 pt**

II – z est un nombre complexe différent de $\frac{1}{2}$. On considère le nombre complexe U défini par $U = \frac{z-2}{2z-1}$.

1) Déterminer la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe U. on pourra poser $z = x + iy$. **1,5pt**
2) Déterminer l'ensemble des points M (x,y) du plan tels que :
   a. U soit un nombre réel. **0,5pt**
   b. U soit un nombre imaginaire pur. **0,75pt**
   c. $|U| = 1$ **0,5pt**

III – a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 3 - 4i$ **0,75pt**

b) Déduire la solution de l'équation $z^2 + iz - 1 + i = 0$ **0,5pt**

IV – Linéariser $\sin^4 x$ **1pt**

Problème : **(10 points)** Les parties A, B et C sont indépendantes

A – Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3$.

1) Calculer S_1, S_2 et S_3. **1pt**
2) Démontre par récurrence que $S_n = 2n^4 - n^2$; **1pt**
3) Déterminer l'entier naturel n tel que $S_n = 29161$. **1pt**

B – a, b et c sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ; b, c et a sont dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique et leur somme est égale à 18. Déterminer ces trois nombres. **1,5pt**

C – Soit (x_n) et (y_n) les suites définies sur IN par $x_o = 2, y_o = 4$ et pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 3y_n)$ et $y_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + y_n)$. soit (D) la droite de repère $(O, \vec{i})$. On désigne par A_n et B_n les points de (D) d'abscisses respectives x_n et y_n.

1) Placer les points A_o, B_o, A_1 et B_1 sur la droite (D). **1pt**
2) Soit (u_n) la suite définie sur IN par $u_n = x_n + y_n$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est constante. **0,75pt**
   b. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ et $[A_{n+1}B_{n+1}]$ ont un même milieu I à préciser. **0,5pt**
3) Soit (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = x_n - y_n$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et convergente. **1pt**
   b. Exprimer v_n et la distance A_nB_n en fonction de n. **0,25pt +0,5pt**
4) a) Exprimer x_n et y_n en fonction de n. **1pt**
   b) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) ont la même limite. **0,5pt**

Examinateur : MOUOKO

Epreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte deux exercices obligatoires et un problème répartis sur deux pages. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie de l'élève.

Exercice 1 : 5pts

I) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z, on pose

$P(z) = z^3 - (7+8i)z^2 - 3(3-13i)z + 4(11-7i)$

1) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire z_0 que l'on déterminera. **0,75pt**
2) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z-4i)(z^2 + az + b)$. **0,75pt**
3) Calculer $(2+3i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **1pt**

II) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2+i; 5+3i$ et $4i$

1) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle BAC. **0,5pt**
2) Calculer l'affixe de G barycentre du système $\{(A,4);(B,2);(C,-3)\}$. **0,25pt**

III) Soit $Z = 2\sqrt{3} + 2i$

1) Trouver sous forme algébrique et sous forme trigonométrique les racines carrées de Z. **1pt**

2) En déduire les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$. **0,75pt**

Exercice 2 : 4pts

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+x} - 2x$; $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$; $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{5x+3}$ **1,5pt**
2) La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{\sqrt{4x+1}-5}{\sqrt{9x-5}-7}$ admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 6$? Si oui, définir ce prolongement. **1pt**
3) Etudier les branches infinies en $x_0 = +\infty$ de $f(x) = \sqrt{16x^2 - 5x + 7}$ **0,75pt**
4) Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2x+5} & si\ x \leq -1 \\ \frac{x-5}{x+7} & si\ x > -1 \end{cases}$

   Etudier la continuité de f en -1. **0,75pt**

Problème

(Il comporte trois parties A, B et C)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. **Unité graphique : 2 cm**

Partie A : **Etude d'une fonction auxiliaire h.**

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 3x - 4$.

1)

a) Etudier les variations de h et dresser le tableau de variations de h. **1pt**

b) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $h(x) = 0$. **0,5pt**

c) Vérifier que $2 < \alpha < 3$. **0,5pt**

d) Donner à l'aide de la méthode par balayage, un encadrement de α à 0,1 près. **0,5pt**

2) En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

<u>Partie B</u> : Etude et tracé de la fonction f

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition. **1,5pt**

2)

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f'(x) = \frac{xh(x)}{(x^2-1)^2}$. **0,75pt**

b) En utilisant les résultats de la partie A, préciser le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau des variations de f. **0,75pt**

3)

a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}$. **0,5pt**

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et en $-\infty$. **0,5pt**

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D). **0,5pt**

4) Tracer la courbe (C) et la droite (D). **2pts**

<u>Partie C</u> : Etude et tracé d'une réciproque.

On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -1[$.

1) Montrer que g admet une réciproque g^{-1}. **0,5pt**

2) Tracer la courbe (C') de g^{-1} , justifier ce tracé. **1pt**

Épreuve De Mathématiques

L'épreuve comporte sur deux pages, deux exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin apporté aux tracés des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

Exercice 1 : 5,25 points

1. On considère les systèmes d'équations suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} -x+2y+z=10 \\ 2x-y+z=7 \end{cases} ; (S_2) : \begin{cases} -3x+2y+2z=0 \\ 3x-4y+3z=0 \\ 6x+6y-29z=0 \end{cases} .$$

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_1) . **0,75pt**

   (b) Déterminer deux triplets (x, y, z) solution de (S_1) tels que $\mid x \mid$,$\mid y \mid$ et $\mid z \mid$ soient les côtés d'un triangle rectangle $(avec :\mid x \mid < \mid y \mid < \mid z \mid)$. **0,75pt**

   (c) Montrer que le système (S_2) équivaut à : $\begin{cases} x-\frac{2}{5}(x+y+z)=0 \\ y-\frac{3}{7}(x+y+z)=0 \\ z-\frac{6}{35}(x+y+z)=0 \end{cases}$. **0,5pt**

      i. On pose $k=x+y+z$, exprimer x , y et z en fonction de k . **0,5pt**

      ii. En déduire l'ensemble solution de (S_2) . **0,5pt**

   (d) Trois amis **Ali** ,**Oumar** et **Abdou** se partagent une somme d'argent . **Ali** et **Oumar** ont respectivement les $\dfrac{2}{5}$ et les $\dfrac{3}{7}$ de la somme à partager . La différence entre la plus petite et la plus grande des trois parts est de $9000Frs$.
   Tache : Déterminer les parts respectifs de chaque amis . **0,75pt**

2. Démontrer par récurrence que :

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(2\times 1-1)+(2\times 2-1)+(2\times 3-1)+...+(2\times n-1)=n^2$. **0,75pt**

   (b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$. **0,75pt**

Exercice 2 : 6,25 points

1. (U_n) et (V_n) sont deux suites définies par : $U_0=2$, $U_1=4$, $U_{n+1}=4U_n-U_{n-1}$ et $V_n=U_{n+1}-(2-\sqrt{3})U_n$.

   (a) Calculer U_2 , V_0 et V_1 . **0,75pt**

   (b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison . **0,75pt**

   (c) Déterminer l'expression de (V_n) et $S_n=V_2+V_3+......+V_{n+1}$ en fonction de n . **0,75pt**

   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$. **0,5pt**

2. Soient les nombres complexes : $a=2\sqrt{3}-2i$, $b=4-4i$,$u=a^4$,$v=b^3$ et $z=\dfrac{u}{v}$.

(a) Donner le module et un argument de a , b , u et v . **1pt**

(b) Déduire le module et un argument de z puis la forme trigonométrique de z . **0,5pt**

(c) Donner la forme algébrique de a^4 , b^3 et déduire que :
$z = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})$. **0,75pt**

(d) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$. **0,5pt**

(e) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3}+1)cosx + (\sqrt{3}-1)sinx = \sqrt{2}$. **0,75pt**

Problème :8,5 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : 3 points

1. Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n+1}{v_n+1} \end{cases}$

   (a) Démontrer par récurrence que , pour tout entier naturel n , $1 \leq v_n \leq 2$. **0,75pt**

   (b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$ et conclure . **0,75pt**

   (c) Déduire que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite . **0,5pt**

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ .Soit $w_n = \dfrac{1}{u_n}$:

   (a) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison. **0,5pt**

   (b) En déduire une expression de (w_n) et (u_n) en fonction de n . **0,5pt**

Partie B : 5,5 points

1. En utilisant les formules d'Euler : Linéarise $cos^4 x$. **0,75pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 + 32i = 0$. **0,75pt**
3. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (E) : $z^2 - (1+2i)z + 3(1+i) = 0$.

   (a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $U = -15 - 8i$. **0,75pt**

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . **0,5pt**

4. Soit F une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $F(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$
   et soit $z_0 \neq 0$ un nombre complexe .

   (a) Montrer que $F(\overline{z_0}) = \overline{F(z_0)}$. **0,25pt**

   (b) Déduire que si z_0 racine de F alors $\overline{z_0}$ est aussi racine de F . **0,5pt**

   (c) Montrer que si z_0 racine de F alors $\dfrac{1}{z_0}$ est aussi racine de F . **0,5pt**

   (d) Calculer $F(1+i)$ et conclure . **0,5pt**

   (e) À partir des questions (b) et (c) déduire de façon immédiate toutes les solutions de l'équation $F(z) = 0$. **1pt**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices indépendants 1, 2 et un problème. La clarté dans la rédaction sera prise en compte par le correcteur.

EXERCICE 1: (02 points)

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x)^2-1}{x\tan x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{4x^2+x+3}+2x$
   0,5 pt×3= 1,5pt
2. Sachant que $-1 \leq \cos x \leq 1$, calculer $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2\cos x - x^2}{3x^2}$ 0,5 pt

EXERCICE 2: (06 points)

I. On considère le polynôme complexe P défini par $P(z) = z^4 - 6z^3 + 17z^2 - 24z + 52$.

1. Montrer que si Z_0 est une racine de P, alors $\overline{Z_0}$ est une racine de P. 0,5 pt
2. Vérifier que $2i$ est une racine de P, puis en déduire une autre racine de P . 0,5 pt
3. Déterminer deux nombres complexe a et b telsque $\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = (z^2+4)(z^2+az+b)$
   0,5 pt
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$. 0,5 pt
5. Le plan est complexe est rapporté à un repère ortho normal $(O;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i;\ z_B = -2i\ et\ z_C = 3-2i$. Soit I le milieu du segment [AC].
   Déterminer l'affixe du point I , puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) des points M d'affixes z vérifiant $|2z-3| = 5$. 1 pt

II. On donne $z_0 = 2i\sqrt{2}$

1. Vérifier que $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 0,25 pt
2. Déterminer les racines cubiques de z_0 0,75 pt
3. Linéariser $(\cos x)^3$; puis linéarise $q(x) = \sin(3x)(\cos x)^3$ 1,25 pt
   (on pourra utiliser la relation $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$***)***
4. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $q(x)$. 0,75 pt

***Problème* : (12 points)**

Partie A : ***06,75pts***

On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto \sqrt{|-x^2+2x+3|}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine définition de f. 0,25 pt
2. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. 0,5 pt
3. Ecrire la fonction f sans symbole de valeurs absolue. 0,5 pt
4. Etudier les branches infinies à (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$ si elles existent. 1,5 pt

5. Etudier la dérivabilité de f en $\mathbf{-1}$ et en $\mathbf{3}$; puis conclure. 1,5pt
6. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f 1,5 pt
7. Construire avec soins (C_f) en faisant ressortir les deux demi-tangentes parallèles à l'axe des ordonnées et les branches infinies. 1pt

Partie B : ***4,25 pts***

A) On définit sur $]-\infty; 0]$, la fonction numérique h par $h(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}$

1. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ vers un intervalle J que l'on déterminera. 0,75 pt
2. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $]-1; 0[$ 0,5 pt
3. Donner un encadrement de β à 10^{-2}près. 1,5 pt

B) On considère la fonction g definie sur $[0; +\infty[$ par :$g(x) = \sqrt{x+1}$

1. Déterminer les dérivées premières et secondes de g sur $[0; +\infty[$. 0,5 pt
2. Montrer que pour tout x appartenant à $[0; 1]$; $\frac{\sqrt{2}}{4} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$. 0,5 pt
3. En utilisant le théorème des accroissements finis à la fonction g sur $[0; x]$; démontrer que ; $\frac{\sqrt{2}}{4}x \leq g(x) - 1 \leq \frac{1}{2}x$ avec $x \in]0; 1[$ 0,5 pt

Partie C : ***1 pt***

1. Montrer que la fonction h admet une primitive sur $\mathbb{R}$ 0,25 pt
2. Déterminer la primitive de h qui prend la valeur 1 en 0 0,75 pt

Bonne chance !!!

LYCEE DE NGOG-MAPUBI	EVALUATION N^0 2	ANNEE SCOLAIRE 2019-2020
EPREUVE DE MATHEMATIQUES	CLASSE :Tle D	DUREE : 4h COEF : 4
COMPETENCE VISEE		
NOMS ET PRENOMS :		
NOTE :	APPRECIATION DE LA COMPETENCE :	
<u>VISA DU PARENT</u> :		

<u>EXERCICE 1</u> : (2pts)

1- Résoudre dans IR^3 *le système* $\begin{cases} 5x+3y+2z=780 \\ x+2y+3z=446 \\ 2x+3y+z=468 \end{cases}$ **(0,75pt)**

2- Trois hommes d'affaires , MVONDO, FOPA et TAGNE se rendent dans un magasin à douala pour faire des achats ; MVONDO achète 5 articles de type A ; trois articles de type B et deux articles de type C et dépense au total 780000F ; FOPA achète un article de type A, deux articles de types B, trois articles de type Cet dépense au total 446000f ; TAGNE achète deux articles de type A, trois articles de types B et un article de type C et dépense au total 468000f ; Quel est le prix de chaque articles **(1pt)**

<u>EXERCICE 2</u> : (3pts)

1- Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel $n\,, 1+q+,,,,,,,,,,,,,+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ **(0,75pt)**

2- On pose $S_n = \sum_{p=1}^{n} p(p!)$ pour n entier naturel non nul ; Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $S_n = (n+1)! - 1$ **(0,75pt)**

3- Démontrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 5 , $2^n > n^2$ **(0,75pt)**

4- Démontrer par récurrence que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 pour tout entier naturel **(0,75pt)**

<u>EXERCICE 3</u> : (5pts)

1- a) Montrer que $(\frac{-1+i}{\sqrt{2}})^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ **(0,5pt)**

b) Résoudre dans IC l'équation $z^3 = 1$; on donnera les solutions sous la forme trigonométrique et sous la forme algébrique **(0,5*3=1,5pt)**

c) Déduire des questions précédentes les solutions dans IC de l'équation $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (E); on remarquera que (E) est équivalent à $(\frac{z}{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}})^3 = 1$ **(0,75pt)**

2- a) Ecrire $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ sous la forme trigonométrique **(0,5pt)**

b) En déduire les arguments des solutions de (E) **(0,5pt)**

3- Déduire des questions $\mathbf{1c}$ *et* $\mathbf{2b}$ les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ **(1pt)**

PROBLEME : (10pts)

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes l'une de l'autre

PARTIE A : (4,5pts)

Pour tout nombre complexe Z , on définit : $P(Z) = Z^3 + 2(\sqrt{2}-1)Z^2 + 4(1-\sqrt{2})Z - 8$

1- Calculer $P(2)$, puis déterminer une factorisation de $P(Z)$ **(1pt)**

2- Résoudre dans IC l'équation $P(Z) = 0$; on appelle Z_1 et Z_2 les solutions de l'équation autre que 2 ; Z_1 ayant une partie imaginaire positive **(0,5*2=1pt)**

3- **a)** Placer dans le plan muni du repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ (unités graphique 2cm) les points $2; B$ et C d'affixes respectives Z_1 et Z_2 ; et I $milieu$ de $[AB]$ **(1pt)**

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle, en déduire une mesure de l'angle$(\vec{U}, \overrightarrow{OI})$ **(0,5pt)**

c) Calculer l'affixe Z_I et son module **(1pt)**

PARTIE B : (5,5pts)

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n+2} \end{cases}$

1- Calculer U_1, U_2 et U_3 **(0,75pt)**

2- On admet qu'il existe une unique suite (a_n) telle que pour tout $n \in IN,\ U_n = \frac{3a_n-1}{3a_n-2}$

a) Démontrer que $a_0 = 1$ **(0,5pt)**

b) Exprimer U_{n+1} en fonction de a_{n+1}, puis de a_n et en déduire que pour tout $n \in IN,\ a_{n+1} = 3a_n - 1$ **(0,5*3=1,5pt)**

c) Calculer a_1, a_2 et a_3 **(0,75pt)**

3- Soit (b_n) la suite définie par $b_n = a_n - \frac{1}{2}$

a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont-on précisera la raison et premier terme **(0,75pt)**

b) Exprimer b_n en fonction de n **(0,25pt)**

c) Exprimer a_n , puis U_n en fonction de n **(0,5pt)**

d) Déterminer la limite de la suite (U_n) **(0,5pt)**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NB : ***La clarté de la copie et la précision dans la redaction seront prises en compte.***

Exercice 1 (03.5 points)

1. Calculer les limites suivantes : **2pts**

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4\sin x+3}{x-1}$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+\sqrt{x^2-1})$; (c) $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$; (d) $\lim\limits_{x\to-1} \sqrt{\frac{x^2-x+2}{x^2+x}}$

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

   (a) Déterminer l'ensemble de définition de g. **0.5pt**

   (b) Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité g_1 en $x_0 = 2$ que l'on définira. **1pt**

Exercice 2 (03 points)

Soit la fonction h définie par : $h(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ et $I = [-4; 1]$.

1. Etudier les variations de h, puis dresser le tableau de variation de h sur I. **0.75pt**
2. Justifier que h est continue sur I. **0.25pt**
3. Dénombrer les solutions de l'équation $h(x) = 2$ sur I. **1.25pt**
4. Montrer que l'équation $h(x) = 4$ admet une unique solution $\gamma \in [-1; 1]$. **0.75pt**

Exercice 3 (02.5 points)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

1. Etudier les variations de f. **0.5pt**
2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante. **0.75pt**

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \le u_n < 2$; **0.75pt**

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. **0.5pt**

Problème (11 points)

Ce problème comporte deux parties indépendantes et obligatoires A et B.

Partie A (06.5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère l'équation $(E) : z^3 + (-4\sqrt{3} + 8i)z^2 + (16 - 32\sqrt{3}i)z + 128i = 0$.
   (a) Montrer que $-8i$ est solution de (E). **0.5pt**
   (b) Déterminer a et b tels que : **0.5pt**
   $z^3 + (-4\sqrt{3} + 8i)z^2 + (16 - 32\sqrt{3}i)z + 128i = (z + 8i)(z^2 + az + b)$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **0.75pt**
2. Soient A, B et C les points d'affixes $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ et $z_C = -8i$.
   Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui transforme C en un point D.
   Soit h l'homothétie de centre O qui transforme B en D.
   (a) Montrer que OAB est un triangle équilatéral. **0.5pt**
   (b) Montrer que l'affixe du point D est $z_D = 4\sqrt{3} + 4i$. **0.5pt**
   (c) Montrer que OAD est un triangle rectangle. **0.5pt**
   (d) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h. **0.5pt**
3. Soit S la similitude directe de centre D qui transforme B en A.
   (a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}i)z - 8i$. **1pt**
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. **0.5pt**
   (c) Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ son image par S.
      i. Déterminer l'expression analytique de S. **0.5pt**
      ii. Déterminer l'image (D') par S de la droite (D) : $x - 2y + 1 = 0$. **0.75pt**

Partie B (04.5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$. **0.75pt**
2. On rappelle que : $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{8\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5}$, $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{4\pi}{5}$.
   On pose $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.
   (a) Calculer z_0^5, puis déduire que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$. **0.75pt**
   (b) Montrer que $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = -1$. **0.75pt**
   (c) Déduire que α et β sont les solutions de l'équation (E) : $x^2 + x - 1 = 0$,
   puis déterminer leurs valeurs exactes ($\alpha > 0$ et $\beta < 0$). **0.75pt**
   (d) En utilisant les relations trigonométrique ci-dessus,
   montrer que $\alpha = 2\cos\frac{8\pi}{5}$ et $\beta = 2\cos\frac{6\pi}{5}$. **1pt**
   (e) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{8\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}$. **0.5pt**

MINESEC/DRL /DDM/Nkongsamba Ier	***Année scolaire 2019-2020***	
Evaluation du 1er Trimestre	***Terminale D***	***Novembre 2019***
Epreuve de Mathématiques	***Coef :04***	***Durée : 04H***
LYCEE DU NLONAKO	**M. Jean Jacques Jemele**	

EXERCICE 1 Limites et continuité

A

1- Calcule les limites suivantes ***(0,5pt)X4***

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{3x^2+1} + x$; *b)* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{3x}$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

2- Ecrire plus simplement $A = \frac{4\sqrt[3]{4} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$ ***(0,5pt)***

B

on considère la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{h(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 6x + 8} & \boldsymbol{si\ 2 < x \leq 7} \\ \boldsymbol{2x - 1 - \frac{3}{x-1}} & \boldsymbol{si\ x \leq 2} \end{cases}$

a) Déterminer le domaine de définition de h. ***(0,5pt)***

b) Etudier la continuité de h en 2. ***(0,5pt)***

C

On considère la fonction g définie par $\boldsymbol{g(x)} = x^3 - 3x - 4$

1 – Dresser le tableau de variations de g ***(1pt)***

2 a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$. ***(0,5pt)***

b- Montrer que cet unique réel α appartient à [2 ; 3] ***(0,5pt)***

3 – Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près en utilisant la méthode par balayage. ***(0,5pt)***

4 – Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ ***(0,5pt)***

5- Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque de g sur $]-\infty; -1]$ ***(0,5pt)***

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$.

Soit $\boldsymbol{z = x + iy}$ et $\boldsymbol{z' = x' + iy'}$ deux nombres complexes. On considère la transformation $\boldsymbol{r}$ définie par : à tout point $\boldsymbol{M}$ d'affixe $\boldsymbol{z}$ on associe le point $\boldsymbol{M'}$ d'affixe $\boldsymbol{z'}$ tel que : $\begin{cases} \boldsymbol{2x' = x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}} \\ \boldsymbol{2y' = \sqrt{3}x + y + 1} \end{cases}$

1.a) Déterminer l'écriture complexe de $\boldsymbol{r}$. ***(0,5pt)***

b) En déduire la nature exacte et les éléments caractéristiques de $\boldsymbol{r}$. ***(0,5pt)***

2. Soit $\boldsymbol{h}$ l'application du plan dans le plan qui à tout point $\boldsymbol{M}$ d'affixe $\boldsymbol{z}$ associe le point $\boldsymbol{M'}$ d'affixe $\boldsymbol{z'}$ définie par $\boldsymbol{z' = -2z + 3i}$.

Montrer que $\boldsymbol{h}$ est une homothétie dont on précisera son centre et son rapport. ***(1pt)***

3. On considère $\boldsymbol{s = hor}$ .Déterminer l'écriture complexe de $\boldsymbol{s}$. ***(0,5pt)***

PROBLEME : **Ce problème comporte 03 parties indépendantes**

PARTIE A

1- Donner la forme trigonométrique du complexe 1- i. ***(0,5pt)***

2- En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $(1-i)^n$. soit un réel. ***(0,5pt)***

3- P est le polynôme de la variable z tel que $\mathbf{P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i}$.

a) Vérifie que 1-i est une racine de P. ***(0,5pt)***

b) Résoudre alors l'équation P(z) = 0 dans $\mathbb{C}$. ***(0,75pt)***

4- A,B et C sont trois points (1; -1) ; (0; 2) et (-2; -2) dans un repère orthonormé direct du plan, S la similitude directe de centre B et transformant A en C.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S. ***(0,75pt)***

b) Donner l'écriture complexe de S. ***(0,75pt)***

PARTIE B

1) Soit **(E) :** $\mathbf{4z^2 - 12z + 153 = 0}$

a) Montrer que si z_0 est solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E). ***(0,5pt)***

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. ***(0,5pt)***

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1cm. On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$\mathbf{z_A = \frac{3}{2} + 6i}$; $\mathbf{z_B = \frac{3}{2} - 6i}$; $\mathbf{z_C = -3 - \frac{1}{4}i}$; $\mathbf{z_P = 3 + 2i}$ et le vecteur $\vec{w} = -1 + \frac{5}{2}i$.

a. Déterminer l'affixe z_Q du point Q image du point B par la translation t de vecteur $\vec{w}$ ***(0,5pt)***

b. Déterminer l'affixe z_R du point R image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$. ***(0,5pt)***

c. Déterminer l'affixe z_S du point S image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. ***(0,5pt)***

3) Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ et en déduire la nature précise du parallélogramme PQRS. ***(0,5ptx2)***

4) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera l'affixe de son centre et son rayon. ***(0,75pt)***

PARTIE C

On considère le nombre complexe : $a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Calculer a^2 puis déterminer son module et son argument. ***(1pt)***
2. En déduire le module de a et vérifier qu'une mesure de l'argument de a est $\frac{19\pi}{12}$ ***(0,75pt)***
3. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $cos\frac{7\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12}$ ***(0,5pt)***
4. Linéariser $\sin^5(x)$ ***(0,75pt)***

LYCEE DE NTUI					
EPREUVE	ANNEE SCOLAIRE	CLASSE	EVALUATION	COEF	DUREE
MATHEMATIQUES	2019/2020	TERMINALE D	N°2	4	4h
EXAMINATEUR	M. DJOUMESSI				

Exercice 1 : 5 points

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (3+20i)z + 10 - 15i$.

1) Ecrire $(3+2i)^2$ et $(3+2i)^3$ sous forme algébrique. 0,5 pt
2) Montrer que $3+2i$ est une racine du polynôme P. 0,5 pt
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$. 1 pt
4) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z,
   $P(z) = (z - 3 - 2i)(z^2 + az + b)$. 0,75 pt
5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. 0,5 pt
6) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $2+i$ et $3+2i$.
   a) Ecrire $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme exponentielle. 0,5 pt
   b) En déduire la nature du triangle ABC. 0,25 pt
7) On désigne par r la rotation de centre B qui transforme A en C.
   a) Déterminer l'angle de la rotation r. 0,5 pt
   b) Donner l'écriture complexe de la rotation r. 0,5 pt

Exercice 2 : 5 points

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{8U_n - 6}{U_n + 1}$ et la fonction f définie par $f(x) = \frac{8x-6}{x+1}$.

1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. 0,5 pt
2) Démontrer par récurrence que pout tout entier naturel n, on a $U_n \geq 1$. 0,75 pt
3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. 0,5 pt
4) En déduire que la suite (U_n) est convergente. 0,25 pt
5) Déterminer la limite de la suite (U_n). 0,5 pt
6) Soit (V_n) la suite définie par : pour tout $\in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_n - 6}{U_n - 1}$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. 0,75 pt
   b) Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n. 0,75 pt
   c) Etudier la convergence de la suite (V_n). 0,25 pt
   d) On pose $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

   Exprimer S_n en fonction de n, puis calculer la limite de la suite (S_n). 0,75 pt

PROBLEME : 10 points

Les parties A et B sont dépendantes.

PARTIE A : 3,25 points

Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

1) Etudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation. 1,5 pt
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que :
   $-1,68 < \alpha < -1,67$. 0,75 pt
3) Donner suivant les valeurs du réel x, le signe de $g(x)$. 0,5 pt
4) Etudier les branches infinies de g. 0,5 pt

PARTIE B : 4,75 points

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{1+x}{x^3-1}$. (C_f) désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. 0,75 pt
2) Démontrer que (C_f) admet deux asymptotes dont on précisera les équations. 0,5 pt
3) Montrer que pour tout réel x différent de 1, on a : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x^3-1)^2}$. 0,75 pt
4) Dresser le tableau de variation de f. 0,75 pt
5) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
a) Montrer que h est une bijection de $]1, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. 0,5 pt
b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}. 0,5 pt
6) Représenter dans le même repère, les courbes représentatives des fonctions h et h^{-1}. 1 pt

PARTIE C : 2 points

On considère la fonction numérique k définie par $k(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de k. 0,5 pt
2) Justifier que la fonction k est impaire. 0,25 pt
3) Démontrer que la fonction k admet deux asymptotes dont on précisera les équations. 1,25 pt

Composition de fin du trimestre		Classe :	Tle D	Année Scolaire :	2019/2020
Epreuve :	**Mathématiques**	**Coef :**	**4**	**Établissement :**	**Lycée de Yangamo**
		Durée :	**4h**		

Exercice 1: (05,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\ \vec{v})$ d'unité 2 cm. Pour tout point P on convient de noter z_p son affixe.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :$z^3+8=0$

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$$z^3+8=(z+2)(az^2+bz+c).$$ **0,75 pt**

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) **0,75 pt**

c) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique et exponentielle **1 pt**

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives -2 ; $1-i\sqrt{3}$ et $1+i\sqrt{3}$. Le point D est le milieu de [OB]. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

a) Déterminer une écriture complexe de R **0,5 pt**

b) Déterminer les images par R des points A, B et C **0,75 pt**

3) On pose $X=\frac{z_A-z_B}{z_C-\ z_B}$

a) Mettre X sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique **1 pt**

b) En déduire la nature du triangle ABC **0,25 pt**

4) Faire la figure **0,5 pt**

Exercice 2: (05,5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur IN^*par : $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{4}{u_n}) \end{cases}$.

1- On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{4}{x})$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;I;J)$.$(OI=4cm$ et $OJ=2cm)$

a) Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_1 ; u_2 et u_3 de la suite (u_n) en utilisant la courbe (C) et la droite (D) d'équation :$y=x$. **2pts**

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite (u_n) ? **0,5pt**

2- On admet que f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$

a) Démontrer que $f([2;3])\subset[2;3]$. **0,75pt**

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n>0$, $2\leq u_n\leq 3$. **1pt**

c) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. **0,75pt**

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente **0,5pt**

Problème :(09 points)

Le problème comporte trois parties indépendantes A ; B et C.

Partie A :(02,75 points)

1- Résoudre dans IR^3 et par la méthode du pivot de Gauss le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 3x - y - z = -6 \\ 4x - y - z = 5 \\ -x + y - z = 4 \end{cases}$$ **1, 5pt**

2- Une boîte contient des jetons rouges, des jetons bleus et des jetons noirs. Si on ajoute deux jetons rouges, les jetons rouges représentent 25% du nouveau total des jetons. Si on retire un jeton rouge, les jetons rouges représentent alors 20% du contenu initial de la boîte. Si on enlève quatre jetons noirs, les jetons noirs représentent la moitié du nouveau total des jetons.

Combien la boîte contient-elle de jetons de chaque sorte ? **1,25pt**

<u>PARTIE B</u> : (04,5 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x-1}$

1) Dresser le tableau de variation de f. **1,5pt**
2) Déterminer l'image par f de l'intervalle]1 ; 2]. **0,25pt**
3) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 a une solution dans l'intervalle $]-\infty; 1]$ **1pt**

   b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution. **0,75pt**
4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1[$.

   a) Démontrer que g détermine une bijection de $]-\infty; 1[$ vers un ensemble que l'on déterminera **0,75pt**

   b) Dresser le tableau de variations de g^{-1} **0,25pt**

Partie C :(01,75 point)

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x-\cos x}$ définie sur $]\frac{\pi}{2};\ +\infty[$

1) Démontrer que pour tout x supérieur ou égal à 2 on a : $\frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x-1}$. **1,25pt**
2) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **0,5pt**

<u>Examinateur</u> : Rodrigue SIMO. PLEG/MATHS

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.
Les pages sont numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

EXERCICE 1 : 04,5 points

I/ On considère le système suivant : $(S): \begin{cases} \mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=100 \\ 3\mathrm{a}-2\mathrm{b}-7\mathrm{c}=0 \\ 6a-5b-11C=0. \end{cases}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) .. **1pt**
2. Un homme, sa femme et leur enfant ont au total 100 ans. Dans n années, l'homme aura la somme des âges de sa femme et de l'enfant. Il y a n années, la femme avait le quadruple de l'âge de l'enfant et l'homme était 6 fois plus âgé que l'enfant.

a) Donne une interprétation mathématique de ce problème. **1pt**

b) En déduire les âges actuels des trois personnes. **0,75pt**

II/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{5x-1}}{x-2} & pour\ tout\ x>2 \\ \frac{x^3-5x^2+10x-8}{4-x^2} & pour\ tout\ x<2 \end{cases}$

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. **0,25pt**

2) Calculer les limites de f en 2 par valeurs positives et par valeurs négatives. **1pt**

3) Dire en justifiant si l'on peut prolonger f par continuité en 2.

4) Si oui préciser ce prolongement. **0,5pt**

EXERCICE 2 : 05 points

A /

1. Calculer $(1-i)^6$ puis en déduire les racines sixièmes du nombre complexe $8i$. **0,75pt**
2. En déduire de ce qui précède, la valeur exacte de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$. **0,5pt**

B / Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4cm.
Soit P, Q et K les points d'affixes respectives $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et -1.

1. Montrer que les points P, Q et K appartiennent au cercle (ζ) de centre O et de rayon 1. **0,75pt**
2. Placer les points P, Q et K dans le repère et en déduire la nature du triangle PQK. **0,5pt**
3. Déterminer et représenter l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que $|z|=|z+1|$. **0,5pt**
4. Montrer que P et Q sont les points d'intersections du cercle (ζ) et (D). **0,5pt**

C / Soit a un paramètre réel.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante: $z^2-(1+i)(1+a)z+i(1+a^2)=0$.

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $\delta^2=-2i(1-a)^2$. **0,5pt**

b. En déduire les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E). **1pt**

PROBLEME : 10,5 points

Le problème comporte deux parties A et B toutes indépendantes.

PARTIE A : 04 points

On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

1) Etudier les variations de la fonction h. **1pt**
2) Sans résoudre h montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution α appartenant à $[1; 2]$. **1pt**
3) Montrer que $|h'(x)| \leq \frac{1}{4}$ sur $[1; 2]$ **0,75pt**
4) En déduire que $|h(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$. **0,5pt**
5) Montrer que le point $\Omega(-1; 1)$ est le centre de symétrie à la courbe représentative de la fonction h dans un repère (O; I, J). **0,75pt**

PARTIE B : 06,5 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + x\sqrt{-x} \ si \ x \leq 0 \\ \frac{1-x}{1+x^3} \ \ si \ x > 0 \end{cases}$

1)
   a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f. **0,5pt**
   b. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0; puis donner une interprétation du résultat. **1,5pt**
   c. Calculer les limites aux bornes de D_f et déterminer les branches infinies éventuels de (Cf), la courbe de f. **1pt**
2) Calculer $f'(x)$? puis dresser le tableau de variation de f. **0,75pt**
3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0]$, et g^{-1} sa réciproque.
   a. Montrer que g^{-1} existe sur un intervalle K à déterminer. **0,5pt**
   b. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de g^{-1}. **0,25pt**
   c. Déterminer l'expression de g^{-1}. **0,75pt**
5) Représenter la courbe de (Cf) et celle de g^{-1}dans un repère (O; I, J). **0,75pt**
6) Trouver une primitive F de f sur $]-\infty; 0]$ qui prend la valeur 3 en -27. **0,5pt**