12pts — **EXERCICE 01**

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=2cm$.

0.5pts — 1)Montrer que : $D_f=\mathbb{R}$.

1pts — 2)a-Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

0.5pts — b-En déduire les branches infinies de la courbe (C_f).

1pts — 3)a-Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

1pts — b-Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.(Justifier votre réponse)

0.5pts — 4)Donner l'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.

0.75pts — 5)a-Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-x=(x+1)\left[\dfrac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}\right]$.

0.75pts — b-En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ).

1.5pts — 6)Tracer la courbe (C_f) (On prend $\sqrt{2}\approx 1.4$).

7)Soit g la restriction de f sur $]-\infty;1]$

0.5pts — a-Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

1pts — b-Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

8)On considère la suite numérique (u_n) définie par: $u_0=-\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1pts — a-Montrer par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $-1<u_n<0$.

1pts — b-Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat 5-b) puis qu'elle est convergente.

1pts — c-Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3pts — **EXERCICE 02**

1)Déterminer une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les deux cas suivants :

1.5pts — a- $f(x)=x^3-3x^2+4$ et $I=\mathbb{R}$. b- $f(x)=2x(x^2+1)^3$ et $I=\mathbb{R}$.

2)Soit g une fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{2}{x^2}+\sqrt[3]{x}$.

1pts — a-Montrer que g admet des fonctions primitives G sur $]0;+\infty[$ puis le déterminer.

0.5pts — b-Déterminer la fonction primitive G de g sur $]0;+\infty[$ telle que $G(1)=0$

5pts

EXERCICE 03

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1pts — 1)Montrer par récurrence que :$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \succ 1$.

0.5pts — 2)a-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{2u_n + 1}$.

1pts — b-En déduire la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

0.5pts — c-Montrer que la suite (u_n) est bornée.

0.75pts — 3)a-Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{3}(u_n - 1)$.

1.25pts — b-En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 01 :

1) Mq $D_f = \mathbb{R}$.

on a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 > 0\}$

puisque $(\forall x \in \mathbb{R}), x^2+1 > 0$ $\left(\begin{array}{l} car\ \Delta = -4 < 0 \\ et\ a = 1 > 0 \end{array}\right)$

alors $D_f = \mathbb{R}$

2) a-

• on a $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

$= \lim\limits_{-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} - 1$

$= \lim\limits_{-\infty} \frac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$

$= \lim\limits_{-\infty} \frac{-(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$

$= -1 - 1 = -2$

(car $\lim\limits_{-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$)

• on a $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} - 1$

$= \lim\limits_{+\infty} \frac{\cancel{x}(1+1/x)}{\cancel{x}\sqrt{1+1/x^2}} - 1$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1 - 1 = \boxed{0}$

(car $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$)

b/ les Branches infinies :

* on a $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -2$ Alors $(\mathcal{C}_f)$ Admet une asymptote Horizontale d'équation $y = -2$ Au voisinage de $-\infty$.

* on a $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ Alors $(\mathcal{C}_f)$ Admet une Asymptote Horizontale d'équation $y = 0$ Au voisinage de $+\infty$.

3) a- on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$f'(x) = \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)'$

$= \frac{(x+1)'\sqrt{x^2+1} - (x+1)\sqrt{x^2+1}'}{\sqrt{x^2+1}^2}$

$= \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \times \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$

$= \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \times \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$

$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}-x}{\sqrt{x^2+1}^3}$$

D'où : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

b/ on a le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$ car $(\forall x\in\mathbb{R})$; $\sqrt{(1+x^2)^3} > 0$

on a $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-x=0$

$\Leftrightarrow 1 = x$

D'où le Tableau de variations

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$	0

$f(1) = \frac{1+1}{\sqrt{1+1}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2}-1$

4) l'equation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est :

on (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

puisque $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

D'où $\boxed{(T) : y = x}$

5) a- soit $x\in\mathbb{R}$ on a :

$$f(x) - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - (x+1)$$

$$= (x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$$

$$= (x+1)\left(\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$f(x) - x = (x+1)\left[\frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}\,(1+\sqrt{x^2+1})}\right]$$

$$= (x+1)\left[\frac{1-\sqrt{x^2+1}^2}{\sqrt{x^2+1}\,(1+\sqrt{x^2+1})}\right]$$

$$= (x+1)\left[\frac{\cancel{1}-x^2-\cancel{1}}{\sqrt{x^2+1}\,(1+\sqrt{x^2+1})}\right]$$

D'où $\boxed{f(x) - x = (x+1)\left[\dfrac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{1+x^2}+1)}\right]}$

b/ on a le signe de $f(x)-x$ est celui de $-(x+1)$ car $(\forall x\in\mathbb{R})$; $x^2 \geq 0$ et $\sqrt{1+x^2}\,(\sqrt{1+x^2}+1) > 0$

on a $-(x+1) = 0 \Leftrightarrow -x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

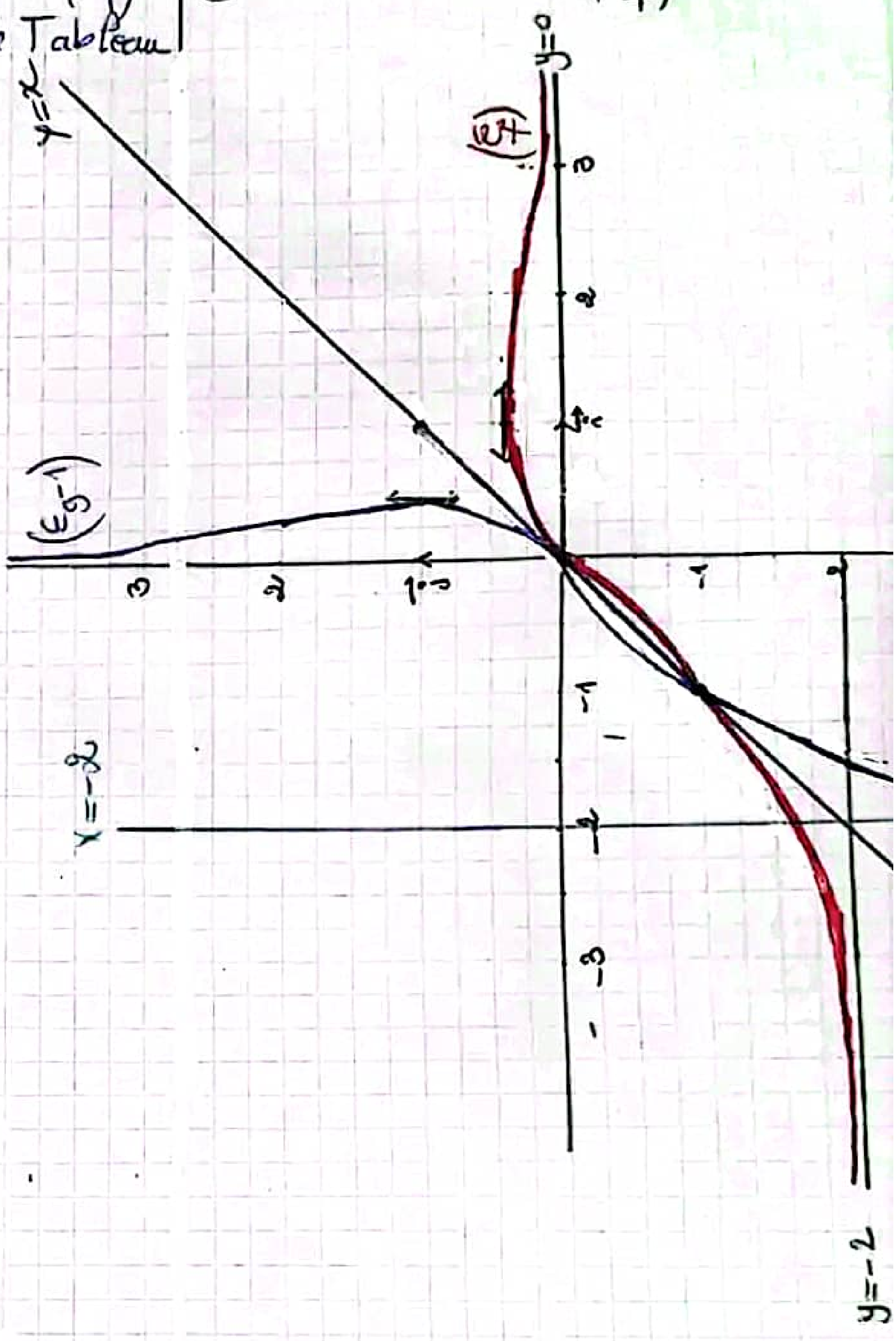
D'où :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-(x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

D'où la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) se résume dans le Tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	
position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ)		$(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (Δ)	$(\mathcal{C}_f)\cap(\Delta)=\{A(-1;-1)\}$	$(\mathcal{C}_f)$ est au dessous de (Δ)	$(\mathcal{C}_f)\cap(\Delta)=\{O(0;0)\}$	$(\mathcal{C}_f)$ est au dessous de (Δ)	

⑥ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$



⑦ . on a g est continue sur $]-\infty;1]$ (car elle est dérivable sur $]-\infty;1]$)

. on a g est strictement croissante sur $]-\infty;1]$

Alors g admet une Fonction réciproque g^{-1} définie sur $J=g(]-\infty;1])=]\lim\limits_{-\infty} g(x);g(1)]$

$=]-2;\sqrt{e}-1]$

3

Scanné avec CamScanner

b/ Tracer $(\mathcal{E}_{g-1})$.

pour Tracer $(\mathcal{E}_{g-1})$ on utilise les données suivants :

* $(\mathcal{E}_{g-1})$ Admet une Asymptote vertical $x=-2$.
* $(\mathcal{E}_{g-1})$ Admet une Asymptote vertical d'équation $x=0$
* $(\mathcal{E}_{g-1})$ admet tangente Horizontale au point $I(\sqrt{2}-1;1)$.
* $O(0;0)\in(\mathcal{E}_{g-1})$ et $A(-2;-1)\in(\mathcal{E}_{g-1})$

$(\mathcal{E}_{g-1})$ regarder la page 3

8/ a-. pour $n=0$ on a $u_0=\frac{-1}{\alpha}$ donc $-1<u_0<0$

. Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $-1<u_n<0$ et Montrons que : $-1<u_{n+1}<0$

on a $-1<u_n<0$ et f strictement croissante sur $]-1;0[$

D'où : $f(-1)<f(u_n)<f(0)$

Alors : $-1<u_{n+1}<0$

D'où d'après le principe de récurrence on a $(\forall n\in\mathbb{N})$; $-1<u_n<0$.

b/ on a $(\forall x\in]-1;0[)$; $f(x)\leqslant x$ (5-b)

et comme $(\forall n\in\mathbb{N})$; $-1<u_n<0$

D'où $(\forall n\in\mathbb{N})$; $f(u_n)\leqslant u_n$ $\left(\begin{matrix}\text{posons}\\ x=u_n\end{matrix}\right)$

D'où $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}\leqslant u_n$

Alors la suite (u_n) est décroissante.

* puisque (u_n) est décroissante et minorée par -1, Alors elle est convergente.

c/ $\lim\limits_{+\infty} u_n$

- on a f est continue sur $]-1;0[$
- $f(]-1;0[)=]-1;0[$
- $u_0\in]-1;0[$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$
- (u_n) est convergente.

D'où $\lim\limits_{+\infty} u_n$ est une solution de l'équation $f(x)=x$ dans $]-1;0[$.

on a $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=0$

Alors $\lim\limits_{+\infty} u_n=-1$ ou $\lim\limits_{+\infty} u_n=0$

or (u_n) est décroissante

Alors $\lim\limits_{+\infty} u_n\leqslant u_0$

càd $\lim\limits_{+\infty} u_n\leqslant\frac{-1}{\alpha}$

D'où $\lim\limits_{+\infty} u_n=-1$

Exercice 03 :

① • pour $n=0$ on a $u_0=2$ Donc $u_0>1$

•• soit $n\in\mathbb{N}$; supposons que $u_n>1$ et montrons que $u_{n+1}>1$.

on a $u_{n+1}-1=\dfrac{3u_n}{2u_n+1}-1$

$$=\frac{3u_n-2u_n-1}{2u_n+1}$$

D'où " $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n-1}{2u_n+1}$ "

on a $u_n>1 \Rightarrow u_n-1>0$ et $2u_n+1>3>0$

D'où $u_{n+1}-1>0$
càd $u_{n+1}>1$

Donc d'après le principe de récurrence on a $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n>1$.

2)a- soit $n\in\mathbb{N}$.

on a $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n}{2u_n+1}-u_n$

$$=\frac{3u_n-u_n(2u_n+1)}{2u_n+1}$$

$$=\frac{3u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}$$

$$=\frac{2u_n-2u_n^2}{2u_n+1}$$

où $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+1}$

b/ on a $u_n>1 \Rightarrow 1-u_n<0$ et $2u_n>2>$

et comme $u_n+1>0$

Alors $\dfrac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+1}<0$

D'où $u_{n+1}-u_n<0$

Alors la suite (u_n) est décroissante

• la convergence de (u_n)

puisque (u_n) est décroissante et minorée par 1 ; Alors (u_n) est convergente.

c- mq la suite (u_n) est bornée

on a (u_n) est décroissante Alors $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\leq u_0$, et comme $u_0=2$

D'où $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\leq 2$

et puisque $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n>1$

Alors $(\forall n\in\mathbb{N})$; $1<u_n\leq 2$

par suite la suite (u_n) est bornée par 1 et 2.

3)a- mq $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}-1\leq\frac{1}{3}(u_n-1)$

on a $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n-1}{2u_n+1}$

on a $u_n>1 \Rightarrow 2u_n>2$

$\Rightarrow 2u_n+1>3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2u_n+1}<\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{u_n-1}{2u_n+1}\leq\dfrac{1}{3}(u_n-1)$ (car $u_n>$

$\Rightarrow u_{n+1}-1\leq\frac{1}{3}(u_n-1)$

pour tout $n\in\mathbb{N}$

b/ En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

. pour $n=0$ on a $0 < u_0 - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$

(car $0 < 2-1 = 1 \leq 1$).

• soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que

$0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et Montrons que $0 < u_{n+1} - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

on a D'aprés la question ① :

$u_{n+1} - 1 > 0$ $(*)$

∘ on a $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Alors $\frac{1}{3}(u_n - 1) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

et puisque $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$

D'où $u_{n+1} - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ $(*)'$

d'aprés $(*)$ et $(*)'$ on déduire que : $0 < u_{n+1} - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

Donc d'aprés le principe de récurrence on a :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

∘ $\lim\limits_{+\infty} u_n$.

on a $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

et puisque $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 \leq \frac{1}{3} < 1$

et $\lim\limits_{+\infty} 0 = 0$

Alors d'aprés les critères de Convergence on a : $\lim\limits_{+\infty} u_n = 1$

Exercice 02 :

① a- on a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Alors $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 4x + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

b/ on a $f(x) = 2x(x^2+1)^3$

$= (x^2+1)'(x^2+1)^3$

D'où $F(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

② . on a $x \mapsto \frac{2}{x^2}$ est Continue sur $]0;+\infty[$

(Fonction rationnelle)

∘ on a $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est Continue sur $[0;+\infty[$

en particulier Continue sur $]0;+\infty[$.

D'où g est Continue sur $]0;+\infty[$ (Comme somme de deux fonctions Continues)

Alors g admet des fonctions primitives G sur $]0;+\infty[$.

• Déterminer les Fonctions G

on a $g(x) = \frac{2}{x^2} + \sqrt[3]{x}$

$= \frac{2}{x^2} + x^{1/3}$

D'où $G(x) = 2x \frac{-1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + c$ où $c \in \mathbb{R}$

D'où $G(x) = \frac{-2}{x} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

D'où $G(x) = \frac{-2}{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

D'où : $G(x) = \frac{-2}{x} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

b/ on a $G(x) = \frac{-2}{x} + \frac{3}{4}x^3\sqrt{x} + c$

Alors $G(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{1} + \frac{3}{4} + c = 0$

$\Leftrightarrow c = 2 - \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow c = \frac{8-3}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}$

D'où $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $G(x) = \frac{-2}{x} + \frac{3}{4}x^3\sqrt{x} + \frac{5}{4}$.