

**EXERCICE 1 :** Démontrer par récurrence que :

- a)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n > n$ .
- b)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$ . Docs à portée de main
- c)  $\forall n \in \mathbb{N}, 10^n - 1$  est divisible par 9.
- d)  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \frac{3n}{2n+1}$ .
- e)  $\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

**EXERCICE 2 :**

1-Ecrire chacune des sommes ci-dessous en utilisant la notation indicielle  $\sum$

$$A_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3;$$

$$B_n = (1)(2) + (2)(3) + \dots + (n)(n+1)$$

$$V_n = \frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(3)(5)} + \frac{1}{(5)(7)} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

2-Démontrez par récurrence chacune des égalités ci-dessous en utilisant les nouvelles expressions obtenues à la question 1.

a) Pour tout  $n \geq 1, A_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

b) Pour tout  $n \geq 1, B_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3-Démontrez par récurrence que :

Pour tout  $n \geq 1, \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \frac{1}{k+1}) \geq 1 + \frac{n}{2}$

**EXERCICE 3 :**

On considère la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$V_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$$

1- Calculer  $V_2$  et  $V_3$ .

2- Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \frac{n}{n+1} \leq V_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ .

3- En déduire que la suite  $(V_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

**EXERCICE 4 :**

Toutes les heures, on injecte à un sujet, une même dose de 1,8 unité, d'une substance médicamenteuse dans le sang. Les injections sont faites par piqûres intraveineuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

En l'espace d'une heure, la quantité de cette substance présente dans le sang diminue de 30%. La première injection se fait à l'instant

$t = 0$ . Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $U_n$  la quantité de substance présente dans le sang à l'instant  $t = n$  (en heure), dès que la nouvelle injection est faite.

1- a) Justifier que  $U_1 = 1,8 + 0,7 \times 1,8$ .

b) Calculer de même  $U_2$ .

2- a) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , montrer que  $U_{n+1} = 0,7U_n + 1,8$ .

b) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $V_n = U_n + \alpha$  où  $\alpha$  est un paramètre réel.

Déterminer  $\alpha$  pour que la suite  $(V_n)$  soit géométrique.

c) Exprimer alors  $V_n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 5 :**

Une entreprise paye en Décembre 2000 un loyer mensuel de 300 000 francs pour ses locaux. Elle doit renouveler son bail le 1<sup>er</sup> Janvier 2001 et deux contrats lui sont proposés :

**1. Contrat A :**

Le loyer augmente de 7% à chaque mois de Janvier, puis reste le même toute l'année.

Quelle est avec ce contrat, le loyer de Janvier 2001 ? 2002 ?

**2. Contrat B :**

Le loyer augmente de 1% chaque mois.

On pose  $U_0 = 300\,000$ ,  $U_1$  le loyer de Janvier 2001,  $U_2$  celui de Février 2001 etc...

1-Calculer  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  en fonction de  $U_0$ .

2-Calculer  $U_{n+1}$  en fonction de  $U_n$ , puis en fonction de  $n$ . ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

3-Soit  $S_n$  le montant total des loyers pendant  $n$  mois à partir de Janvier 2001.c-à-d

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

Calculer selon chaque contrat  $S_{10}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{18}$  et  $S_{24}$

4-Quel est le contrat le plus avantageux ?

**EXERCICE 6 :**

Dire en justifiant, si chacune des assertions ci-dessous est vraie ou fausse.

1. Si  $(v_n)$  une suite géométrique strictement positive de raison  $q$ , alors la suite  $(u_n)$  définie par

$u_n = \ln v_n$  (où  $\ln$  est le logarithme népérien) est une suite arithmétique de raison  $\ln q$

2. Soit  $(Z_n)$  la suite des nombres complexes définie par :  $Z_0 = -\sqrt{3} + i$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $Z_{n+1} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)Z_n$ . Alors :

a) La suite  $(|Z_n|)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme 2.

b) La suite  $(\arg(Z_n))$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{\pi}{6}$  et de premier terme  $\frac{5\pi}{6}$

c) Pour tout entier naturel  $n$ :

$$Z_n = \frac{2}{2^n} \left( \cos \frac{(5+n)\pi}{6} + i \sin \frac{(5+n)\pi}{6} \right)$$

### EXERCICE 7 :

On considère les complexes  $Z_n$  de la manière suivante :

$$Z_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, Z_{n+1} = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i.$$

1- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |Z_n| < 1$ .

2- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $U_n = Z_n - i$ .

a) Démontrer que  $(U_n)_{n \geq 0}$  est une suite géométrique.

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = \frac{1-i}{3^n}$ .

### EXERCICE 8 :

A- Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$S_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^n}$$

1- Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

2- Calculer la limite de  $S_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

B-  $(U_n)$  est la suite numérique définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$U_1 = 0,4 ; U_2 = 0,44 ; U_3 = 0,444 ; \dots ; \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, U_n = 0,44 \dots 4 \text{ (n chiffres 4)}.$$

1-a) Prouver que :  $U_{n+1} = \frac{1}{10}U_n + U_1$ .

b) En déduire par récurrence que :

$$U_n = U_1 + \frac{1}{10}U_1 + \frac{1}{100}U_1 + \dots + \frac{1}{10^n}U_1$$

### EXERCICE 9 : D'après Bacc.D 2006.

Soit la suite  $(U_n)$  définie par :  $\begin{cases} U_0 = 7 \\ 5U_{n+1} - 2U_n = 6 \end{cases}$

1- Calculer les termes  $U_1$  et  $U_2$ .

2- Soit  $(V_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $V_n = U_n - 2$ .

Montre que  $(V_n)$  est une suite géométrique.

3-a) Exprimer  $V_n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

b) Exprimer  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$  en fonction de  $n$ .

4- Calculer les limites respectives de  $U_n$  et  $S_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**EXERCICE 10 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$ .

1- a) Etudier les variations de  $f$ .

b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]1; +\infty[$  une solution unique  $\alpha$  telle que  $\alpha \in ]1, 1, 2[$ .

2-  $g$  est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = \sqrt{1 + e^{-x}}$$

Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  équivaut à l'équation  $g(x) = x$ .

3-  $n$  désigne par  $I$  l'intervalle  $]1; 2[$ .

Montrer que pour tout

$$x \in I, g(x) \in I \text{ et } 0 \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{2e} \leq \frac{1}{5}.$$

4- On définit sur  $\mathbb{N}$  la suite  $(U_n)$  par :  $U_0 = 1, 1$  et pour  $n \geq 0$ ,  $U_{n+1} = g(U_n)$ .

a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n \in I$ .

b) Montrer par récurrence et en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ .

c) En déduire que cette suite converge et préciser sa limite.

d) Déterminer le plus petit des entiers  $p$  pour lesquels  $U_p$  est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-4}$  près.

### EXERCICE 11:

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1, +\infty[$  par  $f(x) = x - 1 - 2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ . (C) désigne sa représentation graphique de  $f$  dans un repère orthogonal d'unité graphique 2cm.

#### Partie A

1) Dresser le tableau de variations de  $f$

2) Montrer que (D):  $y = x - 1$  est asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).

3) Construire (C) et (D) dans le même repère.

4) Montrer que l'équation  $f(x) = 3$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[2, +\infty[$ .

5) Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

#### Partie B

On considère la suite  $(U_n)$  définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \text{ où } n \text{ est un entier naturel.}$$

- 1) Résoudre dans l'intervalle  $[1, +\infty[$  l'équation  $f(x) = x$ . On désigne par  $x_0$  la solution de cette équation.
- 2) Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2, 3]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$
- 3) Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[2, 3]$ ,  $f(x)$  appartient à l'intervalle  $[2, 3]$
- 4) En déduire par récurrence que  $U_n \in [2, 3]$
- 5) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - x_0| \leq \frac{2}{3} |U_n - x_0|$
- 6) Déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - x_0| \leq (\frac{2}{3})^n |U_0 - x_0|$
- 7) Montrer que  $(U_n)$  est convergente, (on précisera la limite de  $(U_n)$ )

#### EXERCICE 12:

$U_1$  et  $a$  sont deux réels donnés. Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + a$ .

- 1- Montrer qu'il existe un nombre réel  $b$  tel que si l'on pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = U_n - b$ ,

La suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  soit une suite géométrique.

- 2- Calculer  $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$  et en déduire  $S'_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$  en fonction de  $U_1, a$  et  $n$ .

#### EXERCICE 13: D'après Bacc.D 2012.

On considère la suite  $U$  à termes positifs définies sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n}$  et  $U_1 = 1$ .

- 1-Calculer  $U_2$  et  $U_3$ . Donner les résultats sous la forme  $2^\lambda$ , où  $\lambda$  est un réel.

2- Soit  $(V_n)$  la suite définie par  $V_n = \ln U_n - 2 \ln 2$ .

- a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique.
- b) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- c) En déduire l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$  et calculer la limite de  $U_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

#### EXERCICE 14:

Soit  $(U_n)$  la suite définie par  $U_0 \in ]0, 1[$  et pour tout

$$n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$$

- 1- Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < U_n < 1$ .
- 2- Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissante.
- 3- En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente.

On veut déterminer la limite de la suite  $(U_n)$  par deux méthodes différentes.

#### 1ère méthode

On pose  $U_0 = \cos \theta$  avec  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

- a) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ .

- b) En déduire la limite de la suite  $(U_n)$ .

#### 2ème méthode

Soit  $(V_n)$  la suite définie par  $V_n = 1 - U_n$ .

- a) Quel est le sens de variation de la suite  $(V_n)$  ?
- b) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq V_{n+1} \leq \frac{1}{2}V_n$
- c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n \leq \frac{V_0}{2^n}$ .
- d) En déduire la limite de la suite  $(U_n)$ .

#### EXERCICE 15:

1. Soit  $(v_n)$  une suite géométrique strictement positive de premier terme  $v_0$  et de raison  $q$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \ln v_n$  où  $\ln$  est le logarithme népérien. Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite arithmétique que l'on caractérisera.

2. On suppose maintenant que  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_1$ . Soit  $q$  un réel non nul. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = q^{u_n}$ . Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique que l'on caractérisera.

3. On pose pour  $n \geq 1$ ,  $w_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$  et  $t_n = w_n + \frac{1}{n.n!}$

- a) Déterminer  $w_1$  et  $t_1$
- b) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $w_n \leq t_n$
- c) Montrer que  $(w_n)$  est croissante et que  $(t_n)$  est décroissante.
- d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n - w_n)$ . En déduire que  $(w_n)$  et  $(t_n)$  sont convergentes et ont une limite commune  $\ell$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $w_n \leq \ell \leq t_n$ . (On dit que  $(w_n)$  et  $(t_n)$  sont des suites adjacentes.)

#### EXERCICE 16: On définit la suite $(U_n)$ sur $\mathbb{N}^*$ par

$U_1 = 6$ ,  $U_2 = 1$  et la relation de récurrence

$$U_{n+1} = -\frac{1}{6}U_n + \frac{1}{6}U_{n-1}.$$

- 1- a) On définit la suite  $(V_n)$  pour  $n > 1$  par :

$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{2}U_n$ . Montrer que  $(V_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ .

- b) On définit la suite  $(W_n)$  pour  $n > 1$  par :

$W_{n+1} = U_{n+1} - \frac{1}{3}U_n$ . Montrer que  $(W_n)$  est géométrique de raison  $-\frac{1}{2}$ .

- 2- a) Calculer  $V_2$ ,  $W_2$  et exprimer  $V_{n+1}$  et  $W_{n+1}$  en fonction de  $n$ .  
 b) En déduire l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
 c) La suite  $(U_n)$  est-elle convergente ?  
 3- On pose pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ ,  
 $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ .  
 a) Déterminer  $S_n$  en fonction de  $n$ .  
 b) Montrer que la suite  $(S_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

#### EXERCICE 17:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la suite  $(U_n)$  définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{U_n} \end{cases}$$

- Etudier et représenter la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ .
- Représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite  $(U_n)$ .
- Déterminer l'abscisse  $\alpha$  du point de concourance de la courbe de et la première bissectrice.
- Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n$ .

#### EXERCICE 18: D'après Bacc.D 2008.

1- Dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , tracer la courbe représentative de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  par :  $g(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ .

2- Soit  $(U_n)$ , la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2} \end{cases}$$

- Représenter sur les axes des abscisses du repère précédent les termes  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$ .
  - Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissante.
  - Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq U_n < 2$ .
  - En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente.
- 3- Soit la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $V_n = \frac{1+U_n}{2-2U_n}$ .

- Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- Exprimer  $V_n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- En déduire la limite de  $U_n$ .

4- On pose  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ . Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

#### EXERCICE 19:

On se propose d'étudier la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = U_n e^{-U_n}$ , puis la convergence de

la suite  $(S_n)$  définie par  $S_n = \sum_{p=0}^n U_p$

- 1-a) Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $U_n > 0$   
 b) Montrer que la suite  $(U_n)$  est convergente puis déterminer sa limite
- 2-a) Montrer que pour tout entier  $n$ ,  
 $U_{n+1} = e^{-S_n}$   
 b) En déduire la limite de  $S_n$  en  $+\infty$ .

#### EXERCICE 20:

1-  $n$  est un entier naturel donné. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation :  $\ln(7^n x) = 2n$ .

On considère la suite numérique  $(V_n)$  définie par :

$$\ln(7^n V_n) = 2n.$$

2-a) Calculer  $V_0$ .

b) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique. Déterminer sa raison.

c)  $(V_n)$  est-elle convergente ou divergente ?

#### EXERCICE 21:

Soit  $(U_n)$ , la suite définie par :

$$U_{n+2} - 2U_{n+1} + U_n = 0.$$

1- Démontrer que  $(U_n)$  est une suite arithmétique.

2- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ ,  $U_1$  et  $U_0$ .

#### EXERCICE 22:

a, b et c sont dans cette ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer a, b et c sachant

$$\text{que : } \begin{cases} a \times b \times c = 1 \\ a^2 + b^2 + \frac{1}{c^2} = 513 \end{cases}$$

#### EXERCICE 23:

Au bout de combien de temps un prix est-il multiplié par 10, dans l'hypothèse d'une inflation annuelle de 3,5% ?