

3. Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x g(x)$.
4. a. Etudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x , puis donne les variations de f sur $\mathbb{R}$.
b. Justifie que : $f(\alpha) = -\frac{1}{4}$
5. Dresse le tableau de variation de f .
6. a. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]\alpha; +\infty[$.
b. Vérifie que $0,56 < \alpha < 0,57$.
7. Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
8. Construis dans le repère (O, I, J) la tangente (T) et la courbe (C_f) .
Le point O est un point d'inflexion de (C_f) .
On prendra $f(-1) = e^{-2} + e^{-1}$; $f(0,75) = 0,9$; $f(0,8) = 1,4$ et $f(0,9) = 2,7$.

EXERCICE 15

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Unité graphique 2 cm.

- 1) Etudie la continuité de f en 0.
- 2) Etudie la dérivabilité de f en 0.
- 3) Calcule la limite de f en $+\infty$.
- 4) a- Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-x}$.
b- En déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
- 5) a- Justifie que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle K à préciser.
b- On note f^{-1} la bijection réciproque de f . Calculer $f(1)$ et $(f^{-1})'(\frac{2}{e})$
- 6) On suppose que $\forall x \in]0; +\infty[, 0 < x - f(x) < \frac{1}{2x}$
a- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$. Interprète le résultat graphiquement.
b- Précise la position relative de (C_f) par rapport à la droite (D) : $y = x$.
- 7) Construire (C_f) et (D).

EXERCICE 16

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$.

- 1) Le tableau de variation de la fonction g est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	-2	-1

- a- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α .
- b- Vérifier que : $0,86 < \alpha < 0,87$.
- c- Justifier que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.
- 2) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, J, J), (unité graphique : 2 cm).

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$.

On note (C) la courbe représentative de f .

Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction F soit une primitive de f

- 2) $f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$; $F(x) = (ax+b)e^{\frac{x}{2}}$
 3) $f(x) = 3(x^2+x)e^{-x}$; $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$

EXERCICE 11

- 1) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{2e^x-1}{2e^x+5}$
 a- Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = a + \frac{be^x}{2e^x+5}$
 b- En déduire la primitive H sur $\mathbb{R}$ de h qui prend la valeur $\frac{6\ln 5}{5}$ en 0.
 2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{(x-2)e^x-x-2}{e^x-1}$
 a- Trouver les nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = ax + b + \frac{ce^x}{e^x-1}$
 b- En déduire la primitive G sur $\mathbb{R}^*$ de g telle que $G(\ln 2) = 0$.

EXERCICE 12

- 1) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}$
 2) Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$
 a- Calculer : $f'(x)$ et $f(x) + f'(x)$.
 b- En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - f'(x)$.
 3) Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(-\ln 2) = 0$.

EXERCICE 13

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x - e^x - 1$.

On désigne par (C) la représentation graphique de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

- 1)
 a- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.
 b- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement les résultats.
 c- Calculer $f'(x)$ et donner le sens de variation de f.
 d- Dresser le tableau de variation de f.
 2) a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; 2[$
 b- Dresser une valeur approchée à 10^{-2} près de α .
 c- Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) > 0$
 d- Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion à déterminer.
 3) Construire la courbe (C).

EXERCICE 14

On considère les fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par : $f(x) = xe^x(xe^x - 1)$ et $g(x) = 2xe^x - 1$.
 (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 3 cm.
 On admet que $g(\alpha) = 0$ et pour tout $x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$ avec $0,35 < \alpha < 0,36$.

1. Calculer la limite de f(x) en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
 2. Calculer la limite de f(x) et $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

Groupe Excellence Académique

- a- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
- b- En déduire que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.
- 3) On admet que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
Etudier la position de (C) par rapport à (D).
- 4) Soit f' la fonction dérivée de f .
- a- Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
- b- En déduire les variations de f .
- c- Dresser le tableau de variation de f . On ne calculera pas $f(\alpha)$.
- 5) Construire (D) et (C) sur le même graphique. On précisera les points de (C) d'abscisses : $0 ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; 4$.
On prendra : $\alpha = 0,865$ et $f(\alpha) = 0,4$.

EXERCICE 17

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(1-e^{-x})$

Sa représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unité graphique $OI = 2$ cm et $OJ = 1$ cm.

Partie A

Soit la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + xe^{-x}$

- 1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) a- Soit g' la fonction dérivée de g , déterminer $g'(x)$.
b- Déterminer le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- 3) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

Partie B

- 1) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
c- Etudier les positions relatives de (D) et (C).
- 2) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
b- Donner l'interprétation graphique de l'ensemble de ces résultats.
- 3) a- Démontrer que pour tout nombre réel, $f'(x) = g(x)$.
b- En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- 4) a- Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
b- Soit f^{-1} la bijection réciproque de f . Déterminer $(f^{-1})'(0)$.
c- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(C_{f^{-1}})$ en 0.
- 5) a- Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de (C) et (D).
b- Déterminer le point B de (C) où la tangente (T') à (C) est parallèle à la droite (D).
- 6) Tracer (D) et construire (C).

EXERCICE 18

Partie A

On considère la fonction u , dérivable sur $]0 ; +\infty[$, définie par : $u(x) = \frac{3x-2}{x^2} - 5\ln x$

- 1) a- Calculer la limite de u en $+\infty$.
b- Calculer la limite de u en 0.
- 2) a- Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, u'(x) = \frac{-5x^2 - 3x + 4}{x^2}$

b- Justifier que : $\forall x \in]0 ; \frac{-3+\sqrt{89}}{10}[, u'(x) > 0$ et $\forall x \in] \frac{-3+\sqrt{89}}{10} ; +\infty[, u'(x) < 0$.

c- En déduire le sens de variation de u , puis dresser son tableau de variation.

3) On admet que : $u\left(\frac{-3+\sqrt{89}}{10}\right) > 0$

a- Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0 ; +\infty[$, avec $\alpha < \beta$.

b- Justifier que : $0,4 < \alpha < 0,5$ et $1,2 < \beta < 1,3$.

c- Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]0 ; \alpha[\cup]\beta ; +\infty[, u(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha ; \beta[, u(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

On donne la fonction f , dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $f(x) = \left(\frac{2}{x} + 5\ln x\right)e^{-x}$

(C) est la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).

Unités graphiques : OI = 2 cm et OJ = 10 cm.

1) a- Calculer la limite de f en $+\infty$, puis en déduire une interprétation graphique du résultat.

b- Calculer la limite de f en 0, puis donner une interprétation graphique du résultat.

2) a- Démontrer que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = e^{-x} \cdot u(x)$

b- Déterminer le signe de $f'(x)$ en s'aidant de la question 3.c) de la partie A ; puis donner les variations de f .

c- Dresser le tableau de variation de f .

3) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{5\alpha-2}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

4) Montrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $A\left(1 ; \frac{2}{e}\right)$ est : $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$

5) Construire (T) et (C) dans le même repère (O, I, J). On prendra : $\alpha = 0,5$ et $\beta = 1,2$.

Partie C

On considère la restriction g de la fonction f à l'intervalle $[\alpha ; \beta]$.

1) Montrer que g réalise une bijection de $[\alpha ; \beta]$ dans un intervalle J que l'on précisera.

2) Sans étudier g^{-1} , la réciproque de g donner le sens de variation de g^{-1} , puis donner son tableau de variation.

3) Justifier que g^{-1} est dérivable en $\frac{2}{e}$ et Calculer $(g^{-1})'\left(\frac{2}{e}\right)$.

SITUATION COMPLEXE 1

Convies à une journée carrière le vendredi 16 Avril 2021 au Lycée Classique d'Abidjan sur le thème :

« l'entrepreneuriat, un débouché porteur pour les élèves », les élèves de Terminale du Lycée de Garçons de Bingerville ont décidé d'entreprendre. Ils ont noté l'affirmation de l'un des conférenciers sur le bénéfice journalier d'un bon entrepreneur, exprimé en millions de FCFA, réalisé sur x années et donné par la fonction

B définie sur $[2 ; 5]$ par : $B(x) = (x^2 - 3)e^{-x} + \frac{3}{4}$.

Regroupé en association, une entreprise a décidé de financer votre projet entrepreneurial à condition que votre bénéfice minimal journalier sur une période de deux à cinq ans soit supérieur à 700.000 FCFA.

Désigné par ton association, utilise tes connaissances mathématiques, pour convaincre cette entreprise que vous êtes en mesure de satisfaire ses exigences.

SITUATION COMPLEXE 2

Lors d'une expérience pendant le cours de chimie dans une classe de TD d'un lycée, un gaz se répand accidentellement dans le laboratoire. L'évolution du taux de gaz dans l'air peut se modéliser par la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = (x - 2)e^{-x}$ où x est le nombre de minutes écoulées depuis le début de l'incident