Exercices

Exercice 1

1) Calculer les intégrales : $I_1 = \int_1^e \frac{\text{Log}x}{x}dx$; $I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\text{Log}x}dx$; $I_3 = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} + e^{2x}dx$

2) a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} = a + \frac{b}{x-2}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) Calculer l'intégrale $J_1 = \int_0^1 f(x)dx$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$\int_1^e \frac{\text{Log}^2 x}{x}dx$; $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$; $\int_1^e (x\text{Log}x)dx$; $\int_0^1 (x^2+3x-1)e^{3x}dx$; $\int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$

Exercice 3

Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$; $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$.

Soit la fonction f définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \text{Log}(x + \sqrt{x^2+2})$.

1) a) Calculer la dérivée de la fonction f

b) Calculer la valeur de I.

2) a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que $J + 2I = K$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K,montrer que $K = \sqrt{3} - J$.

c) En déduire les valeurs de J et de K.

Exercice 4

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin^2 x dx$.

1) Calculer **I** + **J**
2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties **I** – **J** .
3) En déduire les valeurs de **I** et **J**

Exercice 5

1) Calculer les intégrales : $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$; $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$

2) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que on ait : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$

3) Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$.

4) Soient f, g et h les fonctions définies sur [0 ;1] par $f(x) = xe^{x^2}$, $g(x) = ex - \frac{1}{2}$

et $h(x) = xe^{2x}$.

a) Montrer que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{e-1}{2}$ puis que $\int_0^1 g(x)dx = \frac{e-1}{2}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 h(x)dx = \frac{e^2+1}{4}$.

Exercice 6

1)a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ on a : $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. b) Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2}dx$

2)a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^3}$. b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3}dx$

Exercice 7

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$

1) Montrer que $I_1 = 1 - 2e^{-1}$

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.

b) Calculer I_2 . Vérifier que $I_3 = 6 - 16e^{-1}$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^1 (2x^3 - x^2 + x)e^{-x}dx$.

3) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$ on a : $e^{-1}x^n \le e^{-x}x^n \le x^n$ et en déduire que : $\frac{1}{e(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$

c) Calculer la limite de I_n .

Exercice 8

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - (2x+1)e^{-2x}$.
a)Dresser le tableau de variations de f b) Représenter graphiquement la courbe (C) de f dans un repère orthonormée $(o,\vec{i},\vec{j})$ (L'unité = 2cm)

2) Pour tout nombre λ strictement supérieur à 1, on appelle A(λ) l'aire du domaine constitué des points du plan de coordonnées (x,y) telles que : $1 \le x \le \lambda$ et $0 \le y \le f(x)$
a) Calculer A(λ).
b) Etudier la limite de A(λ) quand λ tend vers $+\infty$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)e^x$.

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) de f.

3) Calculer l'aire du domaine plan limité par :

a) La courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = 2$.

b) La courbe (C),l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives :
$x = 1$ et $x = 3$.

c) La courbe (C) et les droites d'équations respectives:
$x = 1$ et $x = 2$ et $y = 1$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie $]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \text{Log}(x + 1)$

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) .
(Unité graphique $= 2$cm) .

3) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ on a : $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par : la courbe (C) ,l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 11

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C) dans un R-O-N $(o,\vec{i},\vec{j})$.

2) Calculer $S_\lambda = \int_2^{\lambda}(f(x) - 1)$ Interpréter géométriquement S_λ

3) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S_\lambda$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^x - 1$.

1) Dresser le tableau de variations de f .

2) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) .

3) Calculer l'aire du domaine plan limité par : la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1) Dresser le tableau de variations de f .

2) Pour tout réel x on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$
b) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$
c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = F(x) + F(-x)$.
Calculer la fonction dérivée de g .
d) Calculer g(0) et en déduire que F impaire .

3) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ on a : $\int_0^x \dfrac{1}{1+t}dt \leq \int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ .Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 14

Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x - 1$.

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) a)Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions 0 et α et que $2 \leq \alpha \leq 3$. En déduire le signe de $f(x)$.

b) Tracer dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) . (Unité =2cm) .

3) a) Soit $\lambda \in]-\infty, -1[$. Calculer en cm² l'aire $A(\lambda)$ du domaine plan limité par :la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = \lambda$ et D :$y = -x-1$ .b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

4) Soit g la fonction définie par :$g(x) = 2\text{Log}(x+1)$

a) Montrer que le réel α est solution de l'équation $g(x) = x$.

b) Dresser le tableau de variations de g .

c) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C') .

5) Calculer l'aire du domaine plan limité par : (C') ,et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \alpha$ et $y = x$. (On montrera que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$)

6) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} .

b) Tracer dans le même repère orthonormé la courbe (C^{-1}) de g^{-1}.

c) En déduire l'aire du domaine plan limité par : les courbes (C') et (C^{-1}) , et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

Exercice 15

Soit n un entier naturel . On considère l'intégrale : $I_n = \int_{-1}^{0} \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt$.

1) a)Calculer $I_0 + I_1$ puis I_1 .

b) En déduire la valeur de I_0 .

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

3) a) Montrer que pour tout $t \in [-1,0]$ on a : $0 \le \frac{e^{nt}}{1+e^t} \le e^{nt}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le I_n \le \frac{1}{n}$.

4) Montrer que la suite (I_n) est convergente et trouver sa limite.

5) On pose : $J = \int_{-1}^{0} \frac{e^{2t} - e^t - 2}{1+e^t}\,dt$.

a) Vérifier que pour tout $t \in [-1,0]$ on a : $e^{2t} - e^t - 2 = (e^t + 1)(e^t - 2)$

En déduire la valeur de J .

b) Montrer que $J = I_2 - I_1 - 2I_0$. En déduire la valeur de I_2 .

c) Utiliser une intégration par parties pour calculer $K = \int_{-1}^{0} e^t \,\text{Log}(1+e^t)\,dt$.

Exercice 16

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :$\text{Log}(x + \sqrt{x^2+4})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale : $K = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

2) On pose : $J = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}.dx$.

a) Démontrer que l'on a : $J = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}.dx + 4K$.

b) Calculer J à l'aide d'une intégration par parties.