SUITES

NUMERIQUES

Exercices résolus

Exercice n°1

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2%.On note (u_n) (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon. On a donc $u_0 = 20$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats arrondis au centième de millimètre.
2. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison.
3. Déterminer u_n en fonction de l'entier n.
4. Quelle est l'épaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes ?
5. On considère que la pièce est terminée dès que son épaisseur est inférieure à 14 millimètres. Quel est le temps minimal pour que la pièce soit terminée ?

Exercice n°2

Partie A

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise A s'élevait à 230 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 15 000 euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires u_1 en 1991.

2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année $1990+n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Préciser le premier tenue u_0 et la raison a de cette suite.

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A.

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires dune entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 1991.

2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année $1990+n$.Justifier que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,074.

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B.

Partie C

1. Que constate-t-on en 2006 pour les entreprises A et B ?

2. En 2006, le chef de l'entreprise B affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires pratiquement double de celui de l'entreprise A. A-t-il raison ? Justifier.

Exercice n°3

1°) La production annuelle d'une entreprise A est en progression arithmétique et atteint 12000 exemplaires la sixième année .La production totale au cours de ces six années a été de 58500 exemplaires .On appelle p_n la production de A au cours de la $n^{ième}$ année .

a) calculer la production p_1 de la première année et la raison r de la suite arithmétique.

b) Au bout de combien d'années , si la politique de A ne change pas , la production aura -t-elle dépassé le double de sa production initiale ?

2°) Une autre entreprise B a commencé sa production annuelle avec $q_1 = 7500$ exemplaires ,elle augmente sa production chaque année de 10 % par rapport à l'année précédente .

a) En appelant q_n la production de B la $n^{ième}$ année , montrer que la suite (q_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison .Calculer q_2 .

b) Ecrire q_n en fonction de n . Calculer q_6 . (arrondir les résultats à l'unité la plus proche)

c) Au bout de combien d'années dans ces conditions , la production annuelle dépassera-t- elle

le double de la production initiale ?
d)Déterminer la production totale de l'entreprise B au cours de ces six années.

Exercice n°4
L'unité d'intensité du son utilisée dans l'exercice est le décibel (symbole dB). Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$). On appelle u_n (où l'entier *n* est supérieur ou égal à 1) l'intensité du son mesurée après la traversée de *n* plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10 % de l'intensité du son qui lui parvient (par exemple $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0$).

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 .
2. Déterminer la relation entre u_{n+1} et u_n puis exprimer u_n en fonction de u_0 et de *n.*
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
4. Déterminer à partir de quelle valeur de *n* l'intensité du son devient inférieure à 1 dB.

Exercice n°5
En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse. Soit I_0 l'intensité d'un rayon à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à sa sortie.

1. Exprimer I_1 en fonction de I_0.
2. On superpose *n* plaques de verre identiques; on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la nième plaque.

a. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}. Quelle est la nature de la suite (I_n)?
b. Préciser le premier terme et la raison: en déduire l'expression de I_n en fonction de I_0. Préciser, en le justifiant, le sens de variation de la suite (I_n) .
3. Quelle est l'intensité initiale I_0 d'un rayon lumineux dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?
4. Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante.

Exercice n°6
Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1 013 hectopascal. Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25% à chaque élévation de 100 m. Pour tout entier naturel *n*, on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude 100n, exprimée en mètres.
Soit (P_n) la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique. On a alors $P_0 = 1013$.

1. Calculer les pressions P_1 et P_2, arrondies à l'unité, aux altitudes 100 et 200.
2. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n. En déduire la nature de la suite (P_n). Préciser sa raison et son premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $P_n = 1013 \times 0{,}9875^n$.
3. Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à l'altitude 3 200.
4. Calculer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal.

Exercice n°7
1. Soit (E) l'équation différentielle : $y'+2y = 0$,où *y* est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
 a. Résoudre l'équation (E).
 b. Déterminer la solution *f* de (E) telle que *f* (0) = 1 .

2. a. Calculer la valeur moyenne de *f* sur [0; 10] .
   b. Déterminer, en fonction de *n,* la valeur moyenne de *f* sur l'intervalle [*n ; n*+ 1].

3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$, pour tout *n* entier positif ou nul.

   a. Calculer la valeur exacte de u_1 , u_2 , u_3 .

   b. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   c. Déterminer la valeur exacte de la somme $S = u_1 + u_2 + ... + u_9$.

Exercice n°8

Le 01/01/2008, un nouvel employé dans une entreprise se voit proposer deux formules pour l'évolution de son salaire mensuel : dans la formule *A*, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 20 euros ; dans la formule *B*, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 1,5 %. Son salaire mensuel initial durant l'année 2008 est de 1200 euros. On note u_n (respectivement v_n) le salaire annuel selon la formule *A* (respectivement *B*) durant l'année $2008+n$.

1. Expliquer pourquoi, en 2008, on a $u_0 = v_0 = 14400$
2. Expliquer pourquoi, en 2009, on a $u_1 = 14640$ et $v_1 = 14616$.
3. Donner, en justifiant la réponse, la nature des deux suites étudiées. Préciser la raison pour chacune de ces deux suites.
4. Exprimer u_n et v_n en fonction de *n*.
5. Calculer et comparer les deux formules en 2018 puis en 2028 (arrondir les résultats au centime d'euro)
6. Cet employé partira à la retraite, au bout de 42 années complètes de travail dans cette entreprise.
   Il décide de calculer combien il aurait gagné d'argent dans toute sa carrière. On appelle S_n et T_n les sommes des termes des deux suites étudiées, définies par :
   $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ...u_{n-1} + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + v_2 + ...v_{n-1} + v_n$
   Calculer combien l'employé aurait gagné dans toute sa carrière selon chacune des formules *A* et *B*.

Exercice n°9

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $\begin{cases} u_1 = 1/3 \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2) Exprimer v_n en fonction de n.
3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4) Soit la série $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Calculer S_n en fonction de n et montrer que la suite S_n est convergente.

Exercice n°10

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$ où a une constante réelle quelconque.Etudier la convergence de la suite (u_n) .

Exercice n°11

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$, on considère la série de terme général $u_n = \dfrac{4}{n^2-1}$

1) Montrer que cette série est convergente.
2) Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{4}{n^2-1} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n+1}$

3) En déduire que : $\sum_{k=2}^{n} u_k = 3 - \frac{4n+2}{n(n+1)}$

4) En déduire la somme S de la série (u_n).

Exercice n°12

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$, on considère la série de terme général $u_n = \frac{2}{n^2-1}$

1) Montrer que cette série est convergente.

2) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{2}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$

3) En déduire que : $\sum_{k=2}^{n} u_k = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)}$. En déduire la somme S de la série (u_n).

Exercice n°13

Soit la suite (u_n)définie par : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1. Déterminer les réels a et b tels que : $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$. Calculer S_n et la limite S de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°14

Soit (u_n) la suite définie sur N^* par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

1. Montrer que pour tout n de N^*, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

Exercice n°15

1. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots\ldots + 2^n$;

2. Etudier la convergence de la série $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p}$

3. Etudier la convergence des séries de terme général : a) $u_n = \frac{3}{n^2+1}$

4. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^2}$ de terme général $u_n = \frac{1}{\left(2n+1\right)^2}$.

5. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

6. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}$ de terme général $u_n = \frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}$.

7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

8. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n+n}$ de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n+n}$.

Exercice n°16

7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ de terme général $u_n=\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

4. Etudier la convergence de la série de terme général : $u_n=\frac{n+1}{n!}$; $v_n=\frac{1}{n!}$

Exercice n°17

En octobre 1998, Roberto payait sa facture annuelle de chauffage d'un montant de 800€.

1. Sachant que cette facture a augmenté de $2,5$ % par an, quelle a été la facture payée par Roberto en octobre 2008 (arrondir à l'euro) ?
2. En supposant que cette évolution se poursuit, déterminer la somme totale payée par Roberto entre octobre 1998 et octobre 2008 (arrondir à l'euro).
3. Simone a elle perdu sa facture d'octobre 98 mais elle sait que la somme de ses factures entre octobre 98 et octobre 2008 est de 14200€. Sachant que chacune de ses factures a augmenté de $2,5$ % par an, comme son ami d'enfance Roberto, retrouver le montant de sa facture en 1998.

Exercice n°18

1. Après avoir déterminer la raison r de la suite arithmétique définie par $u_1 = -3$ et $u_8 = 32$, donner les 6 premiers termes de la suite arithmétique

Quelle est la valeur de u_{25} ?

2. Donner les 5 premiers termes de la suite géométrique définie par $u_1 = 5$ et $u_2 = 5{,}25$ après en avoir déterminer la raison q. Quelle est la valeur de u_{12} ?

3. Déterminer la somme des nombres de 1 à 100.

4. Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique définie par $u_1 = 125$ et $q = 0{,}95$

Exercice n°19

Un assureur applique pour tout appareil électroménager un abattement de 12 % par an pour vétusté.

a. A quel type de suite correspond cet abattement. En calculer la raison.

b. M. Martin, client de cet assureur, déclare un sinistre sur un lave-linge acheté 870 € il y a 6 années. Cet appareil étant maintenant totalement hors d'usage, l'assureur lui rembourse donc le prix du neuf moins l'abattement vétusté. Quel somme M. Martin recevra-t-il ?

Exercice n°20

Une entreprise artisanale fabrique des sacs à mains en cuir. Sa production mensuelle est de 120 sacs par mois. Une étude de marché lui indique qu'elle peut augmenter régulièrement sa production afin d'obtenir une fabrication mensuelle de 300 sacs dans 3 ans. Le patron de cette entreprise veut étaler l'augmentation de production sur les 36 mois. Cette augmentation est représentée par une suite arithmétique.

a. Quelle en est sa raison r ? (prendre $u_1 = 120$ et $u_{37} = 300$)

b. Combien aura-t-il fabriqué de sacs pendant ces 37 mois ?

Exercice n°21

On s'intéresse à l'évolution de la population d'une ville V et on veut étudier plusieurs modèles d'évolution. En 2005, la population de la ville V est estimée à 10 000 habitants.

Partie A - Étude de deux modèles

1) Première hypothèse de croissance

En analysant l'évolution récente, on fait d'abord comme hypothèse que la population de la ville V va augmenter de 500 habitants par an. On note $u_0 = 10000$ la population en 2005, et u_n la population en (2005 + n).

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) Exprimer u_n en fonction de n.

c) En quelle année la population atteindra-t-elle 20 000 habitants ?

2) Deuxième hypothèse de croissance

On travaille avec l'hypothèse d'une augmentation de 4,7 % par an.

On note v_n la population en (2005 + n). Nous avons alors v_0 = 10 000.

a) Quelle sera alors la population en 2006 ? En 2007 ?

b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Exprimer v_n, en fonction de n.

c) Calculer la population de la ville en 2020.

En examinant l'évolution de villes comparables, des experts ont estimé que la population de la ville V considérée allait doubler en 15 ans.

d) Le résultat trouvé en **2.c)** vous parait-il correspondre à ce que pensaient les experts ?

Solutions

Exercice 1

1. $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_0 = 0{,}9u_0$

Le son perd 10 % de son intensité, cela se traduit par $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_0 = 0{,}9u_0$.

$u_2 = u_1 - \frac{10}{100}u_1 = u_1 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_1 = 0{,}9 \times 0{,}9u_0 = (0{,}9)^2 u_0$.

$u_3 = u_2 - \frac{10}{100}u_2 = u_2 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_2 = (0{,}9)^3 u_0$

2. En raisonnant comme à la première question , sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de l'intensité u_n à u_{n+1} : $u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n = u_n \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_n = 0{,}9u_n$; $u_{n+1} = 0{,}9u_n$.

La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique .La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ .son premier terme est u_0. Le cours donne

la formule générale $u_{n+1} = qu_n = q^{n+1}u_0$., donc on a : $u_n = q^n u_0 = (0{,}9)^n u_0$ pour tout entier naturel n .

3. c. Déterminons le signe de la différence $u_{n+1} - u_n = 0{,}9u_n - u_n = -0{,}1u_n$

Tous les termes u_n, $n \in \mathbb{N}$, sont positifs donc la différence est négative : $u_{n+1} - u_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ .La suite (u_n) est donc décroissante .

Remarque : Tous les termes u_n, $n \in \mathbb{N}$, sont positifs on peut donc étudier le quotient :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0{,}9u_n}{u_n} = 0{,}9 < 1$ pour n > 0. La suite (u_n) est donc décroissante. l'intensité du son devient inférieure à 1 dB quand $u_n = (0{,}9)^n u_0 < 1 \Rightarrow (0{,}9)^n < \frac{1}{100} = 0{,}01$

$\Rightarrow \ln(0{,}9)^n < \ln(0{,}01) \Rightarrow n\ln(0{,}9) < \ln(0{,}01) \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9)}$ puisque $\ln(0{,}9) < 0$; $n \approx 43{,}709$ soit $n = 44$.

Exercice 2

Le rayon lumineux perd 23 % de son intensité , cela se traduit par : $I_1 = I_0 - \frac{23}{100}I_0 = I_0 \times (1 - \frac{23}{100}) = \frac{77}{100}I_0$

2.a En raisonnant comme à la première question , sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de l'intensité I_{n-1} à I_n : $I_n = I_{n-1} - \frac{23}{100} I_{n-1} = I_{n-1} \times (1 - \frac{23}{100}) = \frac{77}{100} I_{n-1}$; $I_n = 0,77 I_{n-1}$.

b. La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique .

La suite (I_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,77$ .son premier terme est I_0.

Le cours donne la formule générale $I_n = qI_{n-1} = q^n I_0$.

c. Déterminons le signe de la différence $I_n - I_{n-1}$: $I_n - I_{n-1} = 0,77 I_{n-1} - I_{n-1} = -0,23 I_{n-1}$.

Tous les termes I_n, $n \in \mathbb{N}$, sont positifs donc la différence est négative : $I_n - I_{n-1} \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ .La suite (I_n) est donc décroissante .

Remarque : Tous les termes I_n, $n \in \mathbb{N}$, sont positifs on peut donc étudier le quotient :

$\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{0,77 I_{n-1}}{I_{n-1}} = 0,77 < 1$ pour n > 0. La suite (I_n) est donc décroissante.

3. l'intensité obtenue après la traversée de 4 plaques est égale à 15 d'où $I_4 = 15 \Leftrightarrow (0,77)^4 I_0 = 15$

$I_4 = 15 \Leftrightarrow I_0 = \frac{15}{(0,77)^4} \approx 42,67$.

4. l'intensité sortante étant inférieure ou égale au quart de son intensité rentrante , cela se traduit par l'inéquation $I_n \leq \frac{1}{4} I_0$, ou n est l'inconnue à déterminer .Cette inéquation peut s'écrire :$(0,77)^n I_0 \leq 0,25 I_0$, après simplification par I_0, on obtient : $(0,77)^n \leq 0,25$; $\ln(0,77)^n \leq \ln(0,25)$ $n\ln(0,77) \leq \ln(0,25)$; $\ln(0,77) < 0$ d'où : $n \geq \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,77)} \approx 5,3$et $n \in \mathbb{N}$, donc $n = 6$ .Il faudra au minimum 6 plaques pour que l'intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de l'intensité rentrante .

Exercice 3

1. $P_0 = 1013$. P_1 est la pression atmosphérique à la hauteur 100 m. P_1 a diminué de 1,25% par rapport à P_0. $P_1 = P_0 - \frac{1,25}{100} P_0 = 1013 \times (1 - \frac{1,25}{100}) = 1000$. De même $P_2 = P_1 - \frac{1,25}{100} P_1 = 1000(1 - \frac{1,25}{100}) = 988$

2. a) La pression P_{n+1} diminue de 1,25% par rapport à P_n donc $P_{n+1} = P_n - \frac{1,25}{100} P_n = P_n(1 - \frac{1,25}{100}) = 0,9875 P_n$

b) On en déduit que (P_n) est un suite géométrique de raison q = 0,9875 et de premier terme $P_0 = 1013$.

c) On en déduit que $P_n = P_0 q^n$; $P_n = 1013 \times 0,9875^n$.

3. $3200 = 100 \times 32$ donc la pression atmosphérique à l'altitude 3200 m est donné par $P_{32} = 1013 \times 0,9875^{32}$

$P_{32} = 677$ La pression est de 677 hectopascal.

4. $P_n \leq 600$; $1013 \times 0,9875^n \leq 600$; $0,9875^n \leq \frac{600}{1013}$; $\ln(0,9875^n) \leq \ln\left(\frac{600}{1013}\right)$;

$n\ln(0,9875) \leq \ln\left(\frac{600}{1013}\right)$; $n \geq \ln\left(\frac{600}{1013}\right) / \ln(0,9875)$ car $\ln(0,9875) \leq 0$. $n \geq 41,6$ soit à partir de $n = 42$. A partir de $42 \times 100 = 4200m$, la pression atmosphérique devient inférieur à 600 hectopascal

Exercice 4

1. $(E): y'+2y=0$

1.a. $y=ce^{-2x}$ est la solution générale de E.

1.b. La solution f de (E) est telle que $f(0)=1$.On a donc$1=ce^{0}=c$ soit c = 1.

D'où *f* est définie par $f(x)=e^{-2x}$.

2.a. La valeur moyenne de *f* sur [0; 10] est : $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$; $\mu=\frac{1}{10-0}\int_0^{10} e^{-2x}dx$

$\mu=\frac{1}{10}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{10}$; $\mu=\frac{1}{20}\left[1-e^{-20}\right]$

2.b $\mu=\frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1}e^{-2x}dx$; $\mu=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_n^{n+1}$ $\mu=\frac{-1}{2}\left[e^{-2(n+1)}-e^{n}\right]$; $\mu=\frac{1}{2}\left[e^{-2n}-e^{-2n}e^{-2}\right]$

$\mu=\frac{1}{2}e^{-2n}\left(1-e^{-2}\right)$

3. $u_n=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$,

3.a. $u_0=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$; $u_1=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2}$; $u_2=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-4}$

3.b. Pour montrer que (u_n) est une suite géométrique il suffit de montrer qu'il existe un réel non nul que tel que $u_{n+1}=qu_n$.

$u_n=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$; $u_{n+1}=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2(n+1)}$; $u_{n+1}=\frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}\times e^{-2}$; $u_{n+1}=u_n\times e^{-2}$.

Donc (Un) est une suite géométrique de premier terme $u_0=\frac{1}{2}(1-e^{-2})$ et de raison e^{-2}

3.c $u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\text{..........}u_{n-1}+u_n=u_1\times\frac{1-q^n}{1-q}$ .On a donc

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\text{..........}u_{n-1}+u_n=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)e^{-2}\times\frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}}.$$

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\text{..........}u_{n-1}+u_n=\frac{1}{2}\times\left(e^{-2}-e^{-2(n+1)}\right).$$

Exercice 5

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %. On note u_n (*n* entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après *n* frappes de marteau pilon. On a donc u_0 = 20.

1) Quand une valeur diminue de 2 % , elle est multipliée par 0,98 .

$u_1=u_0-0,2u_0=0,98u_0=0,98\times 20=19,6mm$ $u_2=u_1-0,2u_1=0,98u_1=0,98\times 19,6=19,21mm$.

u_3 = 0,98 u_2 = 0,98 ×19,21 = 18,83 mm

2) Chaque terme de cette suite est obtenu en multipliant le terme précédent par 0,98, il s'agit donc bien d'une suite géométrique de raison q = 0,98.

3) $u_n=u_0\times q^n=20\times(0,98)^n$

4) Epaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes :

$u_{10} = 20 \times (0,98)^{10}$ = 16,34 mm

5) On cherche n tel que $u_n \leq 14$ $20 \times (0,98)^{10} \leq 14$ $20 \times (0,98)^n \leq 14 \Leftrightarrow 0,98^n \leq \frac{14}{20} = 0,7 \Leftrightarrow n \geq 18$

(En utilisant les touches $y = (0,98)^{\wedge}(x)$ $\ln(0,98)^n \leq \ln(0,7) \Leftrightarrow n\ln(0,98) \leq \ln(0,7) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,7)}{\ln(0,98)} \geq 18$

donc $n \geq 18$, il faut 18 frappes de marteau pilon pour que l'épaisseur en millimètres de la pièce soit inférieure à 14 mm ce qui donne comme le temps minimal pour que la pièce soit terminée :
18 ×6 = 108 s = 1 minutes et 48 secondes.

Exercice 2

Partie A

1. $u_0 = 15000$. $u_1 = u_0 + 15000 = 245000$ €. Le chiffre d'affaires u_1 en 1991 était de 245 000 €

2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + *n*.

u_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + *n* + 1, on a : $u_{n+1} = u_n + 15000$.

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison *a* = 15000 et de premier terme u_0 = 230 000

3. 2006 correspond au 16ème rang donc

$u_{16} = u_0 + 16a = 230000 + 16 \times 15000 = 230000 + 240000 = 470000$€ .

le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A est donc de 470 000 €

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires dune entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. $v_0 = 150000$. $v_1 = v_0 \times 1,074 = 161100$. Le chiffre d'affaires v_1 en 1991 était de 161100 €

2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + *n*. v_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + *n* + 1,

on a : $v_{n+1} = v_n \times 1,074$. Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison *b* =1,074 et de premier terme v_0 = 150 000

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B. $v_{16} = v_0 \times (q)^{16} = 150000 \times (1,074)^{16} = 470067$ €

Partie C

1. On constate que les chiffres d'affaire des deux entreprises A et B en 2006 sont sensiblement les même malgré le chiffre d'affaire plus conséquent de l'entreprise A en 1990.

2. $u_{31} = u_0 + 31a = 230000 + 31 \times 15000 = 695000$€ , donc $2 \times u_{31} = 1390000$€

$v_{31} = v_0 \times (q)^{31} = 150000 \times (1,074)^{31} = 1371589$, on est pas loin du double en effet.

Exercice 7

1. En 2006 , son salaire mensuel vaut 1200 € donc son salaire annuel vaut $12 \times 1200 = 14400$€ .
   Ainsi $u_0 = v_0 = 14400$ (il n'y a pas encore d'augmentation).
2. avec la formule 1 , le salaire mensuel devient en 2007 : $1200 + 20 = 1220$€ , donc le salaire annuel est : $u_1 = 12 \times 1220 = 14640$€ . Avec la formule 2 , le salaire mensuel devient en 2007 : $1200 \times 1,015 = 1218$€ , Donc le salaire annuel $v_1 = 12 \times 1218 = 14616$€ .

3. D'une année à l'autre , avec la formule 1 , le salaire annuel est augmenté de $12\times 20=240€$. Ainsi $u_{n+1}=u_n+240$. La suite (u_n)est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0=14400€$ et raison $a=240$. D'une année à l'autre , avec la formule 2 , le salaire mensuel est multiplié par 1,015 .
Le salaire annuel est également multiplié par 1,015 . v_n est donc une suite géométrique de premier terme $v_0=14400$ et de raison 1,015.
4. comme (u_n) est une suite arithmétique de raison $a=240$; $u_n=u_0+na=14400+240n$.
comme (v_n) est une suite géométrique de raison $q=1{,}015$; $v_n=v_0\times q^n=14400\times(1{,}015)^n$.
5. En $2018=2008+10$, les salaires correspondantes à u_{10} et v_{10}
$v_{10}=v_0\times q^{10}=14400\times(1{,}015)^{10}\approx 16711{,}79€$ et $u_{10}=u_0+na=14400+240\times 10=16800€$ ($v_{10}<u_{10}$)
Donc en 2018 la formule A est plus avantageuse que la formule B
En $2028=2008+20$, les salaires correspondantes à u_{20} et v_{20}
$v_{20}=v_0\times q^{20}=14400\times(1{,}015)^{20}\approx 19394{,}71€$ et $u_{20}=u_0+20a=14400+240\times 20=19200€$ ($u_{20}<v_{20}$)
Donc en 2028 la formule B est plus avantageuse.
6. Avec la formule1 , l'employé aurait après 42 ans de travail : $S_{41}=\dfrac{(41+1)(u_0+u_{41})}{2}$
Or $u_{41}=u_0+41a=14400+240\times 41=24240€$, donc $S_{41}=\dfrac{(42)(14400+24240)}{2}=21\times 38640=811440€$.
Avec la formule 2 , l'employé aurait gagné pendant toute sa carrière :
$$T_{41}=v_0+v_1+......+v_{40}+v_{41}=14400\times\left(\frac{(1{,}015)^{n+1}-1}{1{,}015-1}\right)=\frac{14400}{0{,}015}\left[(1{,}015)^{42}-1\right]\approx 834093{,}23€.$$
Enfin , sur l'ensemble de sa carrière , c'est la formule B la plus intéressante .
Sur ses 42 ans de carrière , il gagnerait environ : $834093-811440=22653€$ avec la formule B.

Exercice 8

1. La production annuelle d'une entreprise A est en progression arithmétique, donc on a :
$p_n=p_{n-1}+(n-1)r$ et on a aussi $S=\dfrac{n(p_1+p_n)}{2}$.
Or $p_6=12000$ et $S_A=58500$ il s'ensuit $\begin{cases}p_6=p_1+(n-1)r\\ S_A=\dfrac{6}{2}(p_1+p_6)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12000=p_1+5r\\ 58500=3(p_1+12000)\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}1200=p_1+5r\\ 58500=3p_1+36000\end{cases}$. $3p_1=58500-36000=22500$ donc $p_1=\dfrac{22500}{3}=7500$.
$12000=p_1+5r$, donc $r=\dfrac{12000-p_1}{5}=\dfrac{12000-7500}{5}=\dfrac{4500}{5}=900$
(p_n)est une suite arithmétique de premier terme $p_1=7500$ et de raison $r=900$.
b. $p_n=2p_1$, donc $p_1+(n-1)r=2p_1$, d'où $(n-1)900=2p_1-p_1=p_1=7500$, donc $n-1=\dfrac{7500}{900}=\dfrac{75}{9}$
et enfin $n=\dfrac{75}{9}+1=\dfrac{84}{9}\approx 9{,}3$, comme n est entier ,donc $n=10$.
$p_{10}=p_1+(10-1)900=7500+900\times 9=15600$ $\qquad$ $p_9=p_1+(9-1)900=7500+900\times 8=14700$.
2°. $q_1=7500$; $q_2=q_1+\dfrac{10}{100}q_1=1{,}1q_1=1{,}1\times 7500=8250$, donc $\dfrac{q_2}{q_1}=1{,}1$, il en résulte que (q_n)est une

suite géométrique de raison $b = 1{,}1$. Par définition $q_n = bq_{n-1} = q_1 b^{n-1}$ et on a $q_n = (1{,}1)^{n-1} q_1$.

$q_6 = (1{,}1)^5 \times 7500 = 12078{,}8$. $q_n = 2q_1$ donc $\dfrac{q_n}{q_1} = 2$ et $(1{,}1)^{n-1} = 2$. Or $(1{,}1)^7 \simeq 1{,}94$ et $(1{,}1)^8 \simeq 2{,}11$

Donc par passage au double , on a $n-1=8$, c'est-à-dire $n=9$.

$q_8 = (1{,}1)^7 \times 7500 \approx 14615$ et $q_9 = (1{,}1)^8 \times 7500 \approx 16076$. $S_B = q_1 \dfrac{b^6 - 1}{b-1} = 7500 \times \dfrac{(1{,}1)^6 - 1}{0{,}1} \approx 57867$

Exercice n°1

1) Pour tout entier $n \in N^*$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\frac{n+1}{3n} u_n}{n+1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{u_n}{n} = \dfrac{1}{3} v_n$

2) (v_n) est donc une suite géométrique de raison $1/3$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = \dfrac{1}{3}$

3) Pour tout $n \in N^*$, $v_n = \dfrac{1}{3} v_{n-1} = v_1 \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Puisque pour tout $n \in N^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, on aura $u_n = n v_n = n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Exercice 2

$u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$ .posons $v_n = \ln u_n$, $v_n = \ln\left(\dfrac{a^n}{n^\alpha}\right) = \ln a^n - \ln n^\alpha = n \ln a - \alpha \ln n = n\left(\ln a - \alpha \dfrac{\ln n}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln a - \alpha \dfrac{\ln n}{n}\right) = \ln a$

Donc : 2 cas :

Si $a > 1$, $\ln a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = +\infty$

Si $a < 1$, $\ln a < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0$.

On conclut que lorsque n tend vers l'infini , le comportement de $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$ est celui de a^n pour $a \neq 1$.

Exercice 3

$n=2 \quad \frac{2}{2-1}-\frac{2}{3}=2-\frac{2}{3}$

$n=3 \quad \frac{2}{3-1}-\frac{2}{3+1}=1-\frac{1}{2}$

$n=4 \quad \frac{2}{4-1}-\frac{2}{4+1}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$

$n=5 \quad \frac{2}{5-1}-\frac{2}{5+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$n=6 \quad \frac{2}{6-1}-\frac{2}{6+1}=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}$

$n=7 \quad \frac{2}{7-1}-\frac{2}{7+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$n=8 \quad \frac{2}{8-1}-\frac{2}{8+1}=\frac{2}{7}-\frac{2}{9}$

....

$n=p-3 \quad \frac{2}{p-3-1}-\frac{2}{p-3+1}=\frac{2}{p-4}-\frac{2}{p-2}$

$n=p-2 \quad \frac{2}{p-2-1}-\frac{2}{p-2+1}=\frac{2}{p-3}-\frac{2}{p-1}$

$n=p-1 \quad \frac{2}{p-1-1}-\frac{2}{p-1+1}=\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p}$

$n=p \quad \frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}=\frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}$

$\frac{4}{n^2-1}=\frac{a}{n-1}+\frac{b}{n+1}=\frac{a(n+1)+b(n-1)}{n^2-1}=\frac{(a+b)n+(a-b)}{n^2-1}$, d'où

$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=4 \end{cases}$ et $a=2$; $b=-2$

$\frac{4}{n^2-1}=\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n+1}$

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = 2+1-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=3-\left(\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}\right)=3-\frac{4n+2}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3-\frac{4n+2}{n(n+1)}\right)=3-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n+2}{n(n+1)}\right)=$$

$$3-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n}{n^2}\right)=3-4\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

Donc la série converge vers $S=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} u_k\right)=3$

Exercice 4

$n=2 \quad \frac{1}{2-1}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$

$n=3 \quad \frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$n=4 \quad \frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

$n=5 \quad \frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$

$n=6 \quad \frac{1}{6-1}-\frac{1}{6+1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$

$n=7 \quad \frac{1}{7-1}-\frac{1}{7+1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$

$n=8 \quad \frac{1}{8-1}-\frac{1}{8+1}=\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$

....

$n=p-3 \quad \frac{1}{p-3-1}-\frac{1}{p-3+1}=\frac{1}{p-4}-\frac{1}{p-2}$

$n=p-2 \quad \frac{1}{p-2-1}-\frac{1}{p-2+1}=\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-1}$

$n=p-1 \quad \frac{1}{p-1-1}-\frac{1}{p-1+1}=\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p}$

$n=p \quad \frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}$

$$\frac{2}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=2}^{n}u_k=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)=\frac{3}{2}-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)=$$

$$\frac{3}{2}-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n^2}\right)=\frac{3}{2}-2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\quad ;\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

Donc la série converge vers $S=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}u_k\right)=\frac{3}{2}$

Exercice 5

$u_n=\frac{1}{n(n+1)}$. on a : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}$ et $\frac{1}{n^2+n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ est donc convergente en vertu du théorème de Riemann. Il est immédiat de vérifier que $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

On obtient successivement : $S_1=u_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $S_2=u_1+u_2=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$S_2=u_1+u_2+u_3=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ et de même en observant les groupements de termes qui s'annulent , on obtient :

$$S_2=u_1+u_2+u_3+.........u_{n-1}+u_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+........+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Par définition de la somme d'une série , on a : $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1.$

Exercice 6

$$u_n=\sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}.$$

1. $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}$ d'où

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}.$$

2. La suite (u_n) est décroissante puisque $-3n-2<0$.
3. La suite est positive puisque somme de termes positifs ; elle est décroissante et minorée, elle converge bien.

Exercice 7

1. la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1+2+2^2+.........+2^n$ diverge car $\sum_{n=0}^{p} 2^n = 1+2+2^2+.........+2^p = \frac{1-2^{p+1}}{1-2} = 2^{p+1}-1$

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} 2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = \lim_{p\to+\infty} (2^{p+1}-1) = +\infty$.

2. la série $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p}$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de 1er terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$

et on a : $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.........+\frac{1}{2^n} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2\left(1-(1/2)^{n+1}\right)$, la série converge puisque :

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(1-(1/2)^{n+1}\right) = 2$; $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ ($q=\frac{1}{2}<1$)

La série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge , on écrit : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} = 2$.

3 .On considère la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$; on a : $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ pour tout n ; or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (comme série de Riemann avec $\alpha = 2$), donc la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$ converge

En admettant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$, on peut dire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1}$ est une série convergente .

On peut aussi utiliser le théorème d'équivalence : On directement :

$\frac{3}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$, la série de terme général $\frac{3}{n^2}$ est convergente donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2+1}$ est une série convergente.

4. On considère la série positive $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ de terme général $U_n = \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^2}$

On a : $n^2U_n = \frac{n^2}{(2n+1)^2} = \frac{n^2}{4n^2+4n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2U_n = \frac{1}{4}$, par conséquent , la règle de Riemann s'appliquant aux séries à terme positifs permet d'affirmer que la série converge .

Quand n tend vers l'infini , u_n est un équivalent de $\frac{1}{4n^2}$, on reconnaît le terme général d'une série de Riemann qui avec $\alpha = 2 > 1$ est une série qui converge , donc la série de terme général u_n converge aussi d'après le théorème d'équivalence des séries positives .

5. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ répond au critère d'une série alternée :

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (on a pour tout $n>0$, $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$ donc $v_{n+1} \le v_n$ ou ($|u_{n+1}| \le |u_n|$)($x \mapsto \frac{1}{x}$)

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Cette série est appelée la ***<u>série harmonique alternée</u>***

6.1a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On reconnaît une série alternée, et ici le théorème spécial de convergence des séries alternées s'applique. En effet, pour tout n entier naturel on a :

$|u_{n+1}| = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = |u_n|$ .Ainsi, la suite définie par $|u_n| = \frac{1}{2n+1}$ est décroissante

et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, donc 1a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente

7. Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. On reconnaît une série alternée, et ici le théorème spécial de convergence des séries alternées s'applique.

En effet, pour tout n entier naturel on a : $|u_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ $|u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2} = |u_n|$.

Ainsi, la suite définie par $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ est convergente.

8. $0 < \frac{n^2}{2^n+n} < \frac{n^2}{2^n} = v_n$

Etudions la convergence de la série de terme général v_n en utilisant la règle d'Alembert

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} < 1$ donc la série de terme général v_n est convergente .D'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs , la séries de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n+n}$ est convergente également .

Exercice 8

1. soit la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$; pour tout $n>0$ $|u_n| = \left|\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right| \le \frac{1}{n^2}$. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

(théorème de Riemann), donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ converge (critère de comparaison

La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente , $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ est convergente .

2. Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$. Pour tout $n>0$, on a : $0 \le \frac{\arctan n}{n^2} < \frac{\pi}{2n^2}$, donc $0 \le u_n < \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2}$. La série

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (théorème de Riemann)donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ est convergente.

3. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n+2}{(n+1)!}\right)/\left(\frac{n+1}{n!}\right)=\frac{n+2}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n+1}=\frac{n+2}{(n+1)^2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$, $0<1$

Donc d'après la règle d'Alembert , la série $\sum\frac{n+1}{n!}$ est convergente

4. On a : $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n-2}$, $u_n-\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{\sqrt{n}}{n-2}-\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{n\sqrt{n}-n\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{n(n+1)}=\frac{2\sqrt{n}}{n(n+1)}$, cette expression est positive pour tout $n>2$. On a donc $u_n>\frac{\sqrt{n}}{n}$ ou $u_n>\frac{1}{n^{1/2}}$. La série de terme général $\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge (comme série de Riemann avec $\alpha=\frac{1}{2}<1$), on déduit donc que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-2}$ est divergente .on peut aussi la règle d'équivalence :

$\frac{\sqrt{n}}{n-2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n}}{n}$ donc $\frac{\sqrt{n}}{n-2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n}}$ la conclusion vient de manière immédiate : la série de terme général $\frac{\sqrt{n}}{n-2}$ est divergente.

<u>**Quelques séries numériques de référence :**</u> **Série harmonique :** c'est la série : $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$

Bien que son terme général tend vers 0 en + ∞, cette série est divergente en effet :

$$\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2\ termes}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4\ termes}+\dots\dots+\underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1}+\dots\dots+\frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}\ termes}$$

$$\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2\ termes}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4\ termes}+\dots\dots+\underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1}+\dots\dots+\frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}\ termes}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq 2\times\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq 4\times\frac{1}{8}\ ;\ \dots\dots\dots\dots\ ;\ \frac{1}{2^{p-1}+1}+\dots\dots+\frac{1}{2^p}\geq 2^{p-1}\times\frac{1}{2^p}$$

$$\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k}\geq 1+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+\dots\dots+2^{p-1}\times\frac{1}{2^p}=1+\frac{1}{2}\underbrace{(1+1+1+\dots\dots\dots+1)}_{p}\ ;\ \text{donc}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\geq 1+\frac{p}{2}$$

soit n un entier naturel non nul, soit p la ***partie entière*** du nombre $\frac{\ln n}{\ln 2}$, on a : n $\geq 2^p$ et : $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\geq 1+\frac{p}{2}$

quand n tend vers +∞ , p tend également vers + ∞ d'ou la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est une série divergente.

III. Raisonnement par Récurrence.

<u>***Propriété***</u> : Soit P(n) une propriété dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.

Etape 1 : Vérification (initialisation)

On vérifie que la propriété est vraie pour le premier terme : P(0) ou P(1) est vraie.

Etape 2 : Hérédité

On suppose que la propriété est vraie pour le terme de rang n et on démontre que si elle est vraie pour le rang n elle est vraie pour le rang n + 1.

Si pour tout entier $n\geq n_0$ on a P(n) vraie $\Rightarrow$ P(n+1)vraie.

Exercice 3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a :

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 3.

Soit à démontrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$. $P_{n0=1}$: $1^3 = 1^2$

On suppose que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Somme des n premiers cubes (non nuls) $1^3+2^3+3^3+.........+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Démonstration :

Le principe est le même que pour la somme des n premiers carrés ,

posons :

$S_1 = 1+2+3+...+n$

$S_2 = 1^2+2^2+...+n^2$

$S_3 = 1^3+2^3+...+n^3$

la formule du binôme de Newton permet d'écrire : $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1$

on obtient en faisant varier k de 1 à n , n équations que l'on peut ajouter membre à membre :

$2^4 - 1^4 = 4\times 1^3 + 6\times 1^2 + 4\times 1 + 1$

$3^4 - 2^4 = 4\times 2^3 + 6\times 2^2 + 4\times 2 + 1$

...

$\underline{(n+1)^4 - n^4 = 4\times n^3 + 6\times n^2 + 4\times n + 1}$

$(n+1)^4 - 1 = 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$

en isolant S_3 on obtient la formule de la somme des cubes.

Somme des n premiers carrés (non nuls) $1^2+2^2+3^2+4^2+....+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

démonstration :

posons :

$S_1 = 1+2+3+...+n$

$S_2 = 1^2+2^2+...+n^2$ on sait que : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

on peut donc écrire et ajouter membre à membre les n égalités suivantes :

$$\cancel{2^3} - 1^3 = 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1$$
$$\cancel{3^3} - \cancel{2^3} = 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1$$
$$\cancel{4^3} - \cancel{3^3} = 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1$$
....
$$\underline{(n+1)^3 - \cancel{n^3} = 3\times n^2 + 3\times n + 1}$$
$$(n+1)^3 - 1 = 3\times(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3\times(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$
$$(n+1)^3 - 1 = 3\times S_2 + 3\times S_1 + n$$
$$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - 3S_1 - n$$
$$3S_2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n$$
$$3S_2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}$$
$$3S_2 = \frac{(n+1)}{2}\left[2(n+1)^2 - 2 - 3n\right]$$
$$S_2 = \frac{(n+1)}{6}\left[2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n\right]$$
$$S_2 = \frac{(n+1)}{6}(2n^2 + n)$$
$$\boxed{S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 3

En octobre 1998, Roberto payait sa facture annuelle de chauffage d'un montant de 800€.

1. L'augmentation de 2.5% par an se traduit par une multiplication par $1,025$1 d'une année sur l'autre.En octobre 2008, la facture sera de $800\times(1,025)^{10} = 1024€$ soit 1024€ arrondi à l'unité.

2. Le montant des factures F_n à l'année $1998+n$ est une suite géométrique de raison $1,025$ et de premier terme $F_0 = 800$. La somme totale des factures est donnée par :

$$F_0 + F_1 + F_2 + ...F_{10} = F_0 \times \frac{q^{11}-1}{q-1} = 800\times\frac{(1,025)^{11}-1}{1,025-1} = 9987€ \quad \text{(arrondi à l'euro).}$$

3. Le montant M_n des factures de Simone à l'année $1998+n$ est une suite géométrique de raison $1,025$ et de premier terme M_0 à déterminer. La somme totale des factures est donnée par :

$$14200 = M_0 \times \frac{(1,025)^{11}-1}{1,025-1} \Leftrightarrow M_0 = \frac{14200\times 0,025}{(1,025)^{11}-1} = 1138€ \quad \text{(arrondi à l'euro).}$$

Exercice 2

En 2005, la population de la ville est estimée à 10000 habitants.

Partie I

1. On suppose que la population augmente de 500 habitants par an et on pose u_n la population en $2005+n$.

a. Par définition, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute 500 : la suite u_n est donc arithmétique de raison 500, de premier terme $u_0 = 10000$.

b. D'après les résultats sur les suites arithmétiques, $u_n = u_0 + nr$ soit ici $u_n = 10000 + 500n$.

c. Cherchons n tel que 10000
20000 10000 500 20000 500 10000 20
500 n u ≥ ⇔ + n ≥ ⇔ n ≥ ⇔ n ≥ =: donc c'est à partir de l'année 2025 que la population a plus que doublé par rapport à son premier terme.

2. Supposons maintenant que la population augmente de 4.7% par an.

a. Pour augmenter un nombre de 4.7% on le multiplie par 1.047 :
en 2006 : il y a 10000□1.047 = 10470 habitants.
en 2007 : il y a 10470□1.047 » 10962 habitants environ.

b. Notons n v la population en 2005+n : pour passer d'un terme au suivant, on augmente de 4.7% donc on multiplie par 1.047. La suite est donc géométrique, de raison 1.047 et de premier terme $v_0 = 10000$

D'après le cours, $v_n = v_0 b^n$ soit ici $v_n = 10000 \times (1,047)^n$.

c. En 2020, soit pour n = 15, la population est estimée à $v_{15} = 10000 \times (1,047)^{15} \approx 19916$ habitants.

d. La population double quand elle atteint les 20000 habitants. Selon le modèle précédent, en 15 ans, la population atteint 19916 habitants environ. L'estimation des experts est donc valable.

Exercices d'évaluations

Exercice n°13

1. u_n est une suite arithmétique de raison r = 5 et de premier terme $u_1 = -1$.
 a. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire u_{20} et u_{100}
 b. Calculer $S = u_1 + u_2 + ... + u_{20}$.
2. v_n est une suite géométrique de raison b = 0,9 et de premier terme v_0 = 4.
 a. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire v_{20} et u_{20} (à 10□3 près)
 b. Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{20}$.
3. Pour chacune des suites suivantes la suite u_n est-elle arithmétique?(justifier votre réponse)
 a. u_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n}{2}$
 b. v_n définie par $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + v_0$
 c. w_n définie par $w_n = 2n^2 + 3$
 d. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2n + 3$ et $u_0 = 5$
 e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n+1}$
5. La suite u_n est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3n + 7$
a. Donner les éléments caractéristiques de cette suite.
 b. Calculer la somme de ses n premier termes.
6. La suite u_n est définie par : $u_0 = -3$ *et* $u_{n+1} = u_n + \dfrac{3}{2}$ pour tout entier naturel n .
 a. Calculer ses 5 premiers termes. Donner les éléments caractéristiques de cette suite.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

c. Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{20}$

Exercice n°14

7. Pour chacune des suites suivantes la suite v_n est-elle géométrique?

a. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{5}{3^n}$

b. pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $v_n = 5 \times 2^{n-1}$

c. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -2v_n + 1$ et $u_0 = 5$

8. La suite v_n est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{3}{2}v_n$ *et* $v_0 = -2$

a. Calculer ses 5 premiers termes.

b. Donner les éléments caractéristiques de cette suite. Exprimer v_n en fonction de *n*.

d. Calculer $S = v_0 + v_1 + ... + v_{10}$.

9 . La suite est définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $u_n = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$

a. Calculer ses quatre premiers termes

b. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire un expression simple de u_n en fonction de *n*.

10. .La suite est définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + ... + \dfrac{1}{3^n}$

a. Calculer ses quatre premiers termes

b. Déterminer une expression simple de u_n en fonction de n

11-Soit u_n une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 4$.

Donner u_n en fonction de *n*. Calculer $S = u_1 + u_2 + ... + u_{50}$.

Exercice n°15

I- On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} = 0,8u_n + 1$ et $v_n = u_n - 5$

1. a. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

b. La suite u_n est-elle géométrique? La suite u_n est-elle arithmétique? Justifier les réponses.

c. Donner une valeur approchée de u_{10} à $10^{\square\square\square}$ près.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel *n* : $v_{n+1} = 0,8u_n - 4$

b. En déduire l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n . Que dire de la suite v_n ?

c. Calculer v_0 . Calculer l'expression de v_n en fonction de *n*.

d. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*. Quelles sont les limites des suites v_n et u_n ?

Exercice n°16

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel *n* : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 5$

1. a. Calculer les termes u_1 et u_2

b . La suite u_n est-elle géométrique? La suite u_n est-elle arithmétique? Justifier les réponses.

2. On considère la suite v_n définie pour tout entier naturel *n* par $v_n = u_n + 10$.

a .Démontrer que la suite v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer le premier terme v_0 .

b.Exprimer le terme général v_n en fonction de *n*. Déterminer la limite de la suite v_n puis celle de la suite u_n.

Exercice n°17

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3.
2. Soit (v_n) la suite définie sur N par $v_n = -1 + u_n$. Calculer v_0 et montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. Déterminer v_n en fonction de *n* et calculer la limite de (u_n) .
4. Déterminer u_n en fonction de *n* et calculer la limite de (u_n) .

Exercice n°18

Une personne loue une maison à partir du 1er janvier 2002. Elle a le choix entre deux formules.
Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 12 000 euros et le locataire s'engage à occuper la maison pendant neuf années complètes.

1- Contrat n°1

Le locataire accepte une augmentation de 5% du loyer de l'année précédente. Le loyer payé pendant la première année est noté $u_0 = 12000$.

a) Calculer le loyer u1 payé lors de la deuxième année.

b) Exprimer le loyer un+1 (payé lors de la (n+2)ème année) en fonction de u_n (payé lors de la (n+1)ème année). En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. Exprimer u_n en fonction de *n*. Calculer u_8 .

c) Calculer la somme payée à l'issue des neuf années de contrat.

2- Contrat n°2

Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 800 euros du loyer de l'année précédente. Le loyer payé pendant la première année est alors noté $v_0 = 12000$.

a) Calculer le loyer v_1 payé lors de la deuxième année.

b) Exprimer le loyer v_{n+1} (payé lors de la (n+2) ème année) en fonction de v_n (payé lors de la (n+1)ème année). En déduire que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison. Exprimer v_n en fonction de *n*. Calculer v_8 .

c) Calculer la somme payée à l'issue des neuf années de contrat.

3- Quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire ?.

Exercice n°20

Pierre opère un placement dans sa banque en versant sur un compte 200 euros, chaque premier janvier à partir du 01/01/2003. La banque rémunère ce compte au taux annuel de 4 %.On note u_0 le montant initial du compte, donc u_0 = 200 et u_n le montant au 1er janvier de l'année(2003 + *n*), *n* étant un entier naturel.

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3.On arrondira au centime d'euro.

2°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

3°) On définit une nouvelle suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel *n,* $v_n = u_n + 5000$.

a) Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n).

b) Prouver que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

c) Exprimer alors v_n en fonction de *n,* puis en déduire que $u_n = 5200 \times (1,04)^n - 5000$.

4°) Combien d'années Pierre devra-t-il attendre, pour disposer d'au moins 3 000 euros sur ce compte ?

Exercice n°21

Un directeur de société engage un jeune technicien et lui propose deux types de rémunération à partir du 1er janvier 2000.
1) Premier type de rémunération
Pour cette première année 2000, il percevra 22 400 euros, puis une augmentation annuelle constante de750 euros. On note u_0 le salaire en euros pour l'année 2000, u_1 le salaire en euros pour l'année 2001, et d'une manière générale u_n le salaire en euros pour l'année 2000 + *n* (pour *n* entier naturel).

a) Calculer les salaires annuels u_1 pour l'année 2001 et u_2 pour l'année 2002.

b) Préciser la nature de la suite (u_n) en indiquant sa raison.

c) Montrer que $u_n = 22400 + 750\, n$.

2) Deuxième type de rémunération
Pour l'année 2000, il percevra aussi 22 400 euros, mais ensuite chaque année une augmentation de 3 % par rapport à l'année précédente. Dans ce cas, on note v_n le montant en euros de la rémunération pour l'année 2000 + *n* (pour *n* entier naturel).

a) Calculer les salaires annuels v_1 pour l'année 2001 et v_2 pour l'année 2002.

b) Montrer que $v_{n+1} = 1,03\ v_n$ pour tout *n*. En déduire la nature de la suite (v_n).

c) En déduire l'expression de v_n en fonction de *n*.

3) Comparaison
a) Calculer dans chacun des deux cas le salaire annuel pour l'année 2008.
b) Pour cette année 2008, préciser le type de rémunération le plus avantageux.

Exercice n°22

1) $(U_n)_{n\in IN}$ est la suite numérique définie par : $U_n = \frac{n-1}{n}$

a) Calculer les trois premiers termes de (U_n).
b) Exprimer U_{3n+1} en fonction de n.
2) $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique telle que : $V_{75} = V_{12} + 504$.
a) Vérifier que la raison de (V_n) est égale à 8.
b) Sachant que $V_{32} = 176$, calculer la somme S définie par : $S = V_{12} + V_{13} + \ldots + V_{75}$.
c) Prouver que (V_n) est strictement croissante.

Exercice n°23

1) Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : pour tout n $\in$IN , $U_n = e^n$

a) Calculer la valeur exacte de U_0 et celle de U_2.
b) Démontrer que pour tout n $\in$IN : $U_{n+1} = e\ .\ U_n$.

En déduire la nature de la suite $(U_n)_{n\in IN}$.

2) Soit $(V_n)_{n\in IN}$ la suite définie par : pour tout n $\in$IN , $V_n = \ln(U_n)$,

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a) Démontrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Calculer la somme $S = V_0 + V_1 + \ . \ . \ . + V_{121}$.

Exercice n°24

1) $(U_n)_{n\in IN}$ est la suite arithmétique définie par : $U_{23} = 71$ et $U_{75} = 227$.
   a) Calculer la somme S définie par $S = U_{23} + U_{24} + \ . \ . \ . + U_{75}$.
   b) Calculer la raison de la suite $(U_n)_{n\in IN}$.
   c) Exprimer U_n en fonction de n.

2) $(V_n)_{n\in IN}$ est la suite numérique définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = 2\left(\frac{5}{8}\right)^n$.
   a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n. En déduire la nature et la raison de la suite $(V_n)_{n\in IN}$.
   b) Calculer la limite de la suite $(V_n)_{n\in IN}$.

Exercice n°25

Soient $(U_n)_{n\in IN}$ et $(V_n)_{n\in IN}$ deux suites numériques définies respectivement par :

$$U_0 = 0 \qquad U_{n+1} = 2 - \frac{5}{U_n + 4}, \ n \in IN \qquad \text{et} \qquad V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}, \ n \in IN$$

1- Calculer U_1, V_0 et V_1.

2- a- Montrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

b- Exprimer V_n en fonction de n.

3- a- Exprimer U_n en fonction de V_n .

b- En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. Que peut-on en conclure ?

Exercice n°26

Soient $(U_n)_{n\in IN}$ et $(V_n)_{n\in IN}$ deux suites numériques définies respectivement par

$U_0 = 0$; $U_{n+1} = \frac{1}{2-U_n}$ pour tout entier n et $V_n = \frac{1}{U_n-1}$

1°) Calculer U_1, U_2, V_0, V_1.

2°) a) Montrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique de raison -1.

b) Donner l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n.

3°) Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$ et $P_n = W_0 \,.\, W_1 \,.\, \ldots \,.W_{n-1}$. avec $W_n = e^{V_n}$

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) En déduire l''expression de P_n en fonction de n.puis la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°27

Soient la suite numérique $(U_n)_{n\in IN}$ définie par la donnée de $U_0 = 10$ et la relation de récurrence :
$U_{n+1} = \frac{U_n - 2}{2}$ pour tout $n \geq 1$ et $(V_n)_{n\in IN}$ la suite définie pour tout n par : $V_n = \ln[U_n + 2]$.

1) Calculer U_1, V_0 et V_1.
2) a/ Montrer que pour tout n élément de IN $V_{n+1} = \ln\left[\frac{U_n + 2}{2}\right]$.

b/ En déduire que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique de raison $r = -\ln 2$.
Préciser le sens de variation de $(V_n)_{n\in IN}$.

3) Exprimer V_n en fonction de n.
4) Exprimer U_n en fonction de V_n puis en fonction de n.

Exercice n°28

Soit la suite arithmétique $(U_n)_{n\in IN^*}$ définie par la donnée des deux termes $U_1 = -2$ et $U_{20} = 55$.

1°) Calculer la somme $S = U_1 + \ldots\ldots + U_{20}$
2°) Déterminer la raison r de cette suite.
3°) Exprimer U_n en fonction de n.
4°) Pour tout n élément de IN*. On pose $V_n = e^{3n-5}$

a/ Calculer V_1 et V_2.
b/ Montrer que $(V_n)_{n\in IN^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison q.
c/ Exprimer la somme $T_n = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ en fonction de n.

Exercice n°29

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$.

On pose $v_n = u_n - 2$.

1. Calculer u_2, u_3 et v_1.
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. On pose $w_n = \ln v_n$ où ln est le logarithme népérien.
   a) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme

   b) Exprimer $S_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ en fonction de n.

Exercice n°30

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $u_0 = 2$; $U_{n+1} = \frac{U_n^2 - U_n - 2}{U_n + 1}$ pour tout n de IN

1°) - Calculer les quatre premiers termes de cette suite.
2°) - a) Montrer que $(U_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
b) Exprimer U_n en fonction de n. c) Quel est le sens de variation de $(U_n)_{n\in IN}$?

3°) - Pour tout $n \in IN$, on pose $V_n = e^{2(1-n)}$
a) Montre que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
c) Calculer la limite de V_n quand $n \to +\infty$.

Exercice n°31

1. Calculer le 21ème terme de la suite arithmétique de premier terme – 1 et de raison 4.

2. Calculer le 18ème terme de la suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 1,7.

3. Calculer le 32ème terme de la suite arithmétique de premier terme – 8 et de raison – 2.

4. Calculer la somme des 15 premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique, le premier étant 3 et le dernier 21,2.

5. Calculer la somme des 20 termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 10 et de raison 2,5.

6. Calculer le 8ème terme d'une suite géométrique de premier terme 3 et de raison 2.

7. Calculer le 7ème terme d'une suite géométrique de premier terme 1,1 et de raison 5.

8. Calculer le 6ème terme d'une suite géométrique de premier terme 100 000 et de raison 0,5.

9. Calculer la somme des 8 termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2.

10. Calculer la somme des 6 termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1000 et de raison 1,5.

11. Déterminer les termes d'une suite arithmétique de 6 termes, le premier étant $u_1 = 17$ et le dernier $u_6 = 31$.

12. Calculer la somme des nombres impairs

13. supérieurs à 20 et inférieurs à 80.

14. Quelle est la raison d'une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 5$ et dont le dixième terme est $u_{10} = 5{,}81$. Calculer la somme de ces 10 termes.

15. Calculer le rang du nombre 46,9 dans la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 7$ et de raison 1,9

16. Calculer le nombre de termes d'une suite arithmétique de premier terme 17, de raison 3 et dont la somme des termes est égale à 1 150.

17. Une entreprise produisant 60 000 unités par an. La production baisse de 3 000 unités par an. Lorsque la production sera nulle, combien aura-t-elle produit d'unités en tout ?

18. Une usine assure, en 2000, une production de 100 000 articles. Elle s'engage à augmenter sa production de 3 % pendant 5 ans.

Quelle sera sa production en 2005 ? Combien d'articles au total auront été fabriqués de 2000 à 2005 ?

19. La production mensuelle d'appareils électroménagers d'une entreprise constitue une suite arithmétique. Le sixième mois, la production atteint 18 000 appareils ($u_6 = 18\ 000$) et la production totale de l'entreprise au cours de 6 derniers mois est de 87 750 appareils.

a) Calculer la production u_1 du premier mois et la raison r de la suite.

b) Au bout de combien de mois la production mensuelle aura-t-elle dépassé le double de la production du premier mois ?

Exercice n°39

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.
1. Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant *t* = 0, N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après *k* siècles (*k* entier). On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.
a) Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0, puis de N_{k-1} en fonction de N_k.
b) En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et *k*.
c) Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite (N_k).
2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.
Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

Exercice n°40

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n-1$

1-a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison r.

b) Calculer en fonction de n, la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots\dots\dots\dots u_n$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = e^{u_n}$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique pour laquelle on précisera le premier terme v_0 et la raison b.

b) Calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots\dots\dots \times v_n$ en fonction de *n*

Exercice n°41

1. Soit (E) l'équation différentielle : $y'+2y = 0$,où *y* est une fonction numérique définie et dérivable sur R
a. Résoudre l'équation (E).
b. Déterminer la solution *f* de (E) telle que *f* (0) = 1 .
2. a. Calculer la valeur moyenne de *f* sur [0; 10] .
b. Déterminer, en fonction de *n,* la valeur moyenne de *f* sur l'intervalle [*n ; n*+ 1].
3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$, pour tout *n* entier positif ou nul.
a. Calculer la valeur exacte de u_0 $u_1$et u_2.
b. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
c. Déterminer la valeur exacte de la somme $S= U_0 + U_1 + \dots + U_9$.

Exercice n°43

Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = e^{-2x}$

1. (a) Calculer la valeur moyenne de *f* sur $[0;10]$.
(b) Déterminer, en fonction de *n*, la valeur moyenne de *f* sur l'intervalle $[n;n+1]$.
2. Soit (u_n) ,la suite définie par $u_n = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right)e^{-2n}$ pour tout n entier positif ou nul.
(a) Calculer la valeur exacte de u_0, u_1 et u_2.
(b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

(c) Déterminer la valeur exacte de la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_9$.

Exercice n°45

Soit $(u_n)_{n\in N}$ la <u>suite</u> définie par $U_n = f(n) = 4e^{-n/2}$

1.Démontrer que $(u_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

2. Soit n un nombre entier naturel. On pose : $S_n = 4(u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n)$ et $T_n = 4(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1})$. Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

3. Déterminer les limites S et T de S_n et T_n lorsque *n* tend vers $+\infty$.

Exercice n°54

I- On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathrm{N}$:

$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$ et $v_n = u_n - 5$

1. a. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

   b. La suite u_n est-elle géométrique? La suite u_n est-elle arithmétique? Justifier les réponses.

   c. Donner une valeur approchée de u_{10} à 10□□□ près.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel *n* : $v_{n+1} = 0{,}8u_n - 4$

   b. En déduire l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n . Que dire de la suite v_n ?

   c. Calculer v_0 . Calculer l'expression de v_n en fonction de *n*.

   d. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*. Quelles sont les limites des suites v_n et u_n ?

Exercice n°55

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel *n* : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5$

1. a. Calculer les termes u_1 et u_2

   b . La suite u_n est-elle géométrique? La suite u_n est-elle arithmétique? Justifier les réponses.

2. On considère la suite v_n définie pour tout entier naturel *n* par $v_n = u_n + 10$.

a .Démontrer que la suite v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer le premier terme v_0 .

b .Exprimer le terme général v_n en fonction de *n*. Déterminer la limite de la suite v_n puis celle de la suite u_n.

Exercice n°56

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3.
2. Soit (v_n) la suite définie sur N par $v_n = -1 + u_n$. Calculer v_0 et montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. Déterminer v_n en fonction de *n* et calculer la limite de (u_n) .
4. Déterminer u_n en fonction de *n* et calculer la limite de (u_n) .

Exercice n°61

Dans un laboratoire de chimie, un stagiaire utilise un liquide dont l'évaporation est importante.
À l'origine, il y a 75 cl de liquide dans la bouteille. Le stagiaire referme mal cette bouteille et on considère alors que le liquide perd chaque jour 5 % de son volume par évaporation.

1. On note u_n la quantité de liquide, exprimée en cl, présente dans la bouteille au bout de *n* jours.

   Ainsi, $u_0 = 75$.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   Vérifier que, pour tout nombre entier *n*, $u_n = 75 \times (0,95)^n$.

c. Calculer la quantité de liquide restant dans la bouteille au bout de sept jours (on donnera le résultat arrondi au dixième).

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer le nombre minimum de jours nécessaires pour que la bouteille contienne moins de 25 cl.

Exercice n°64

Le 01/01/2008, un nouvel employé dans une entreprise se voit proposer deux formules pour l'évolution de son salaire mensuel : dans la formule *A*, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 20 euros ; dans la formule *B*, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 1,5 %. Son salaire mensuel initial durant l'année 2008 est de 1200 euros. On note u_n (respectivement v_n) le salaire annuel selon la formule *A* (respectivement *B*) durant l'année $2008 + n$.

1. Expliquer pourquoi, en 2008, on a $u_0 = v_0 = 14400$
2. Expliquer pourquoi, en 2009, on a $u_1 = 14640$ et $v_1 = 14616$.
3. Donner, en justifiant , la nature des deux suites étudiées. Préciser la raison pour chacune de ces deux suites.
4. Exprimer u_n et v_n en fonction de *n*.
5. Calculer et comparer les deux formules en 2018 puis en 2028 (arrondir les résultats au centime d'euro)
6. Cet employé partira à la retraite, au bout de 42 années complètes de travail dans cette entreprise.
   Il décide de calculer combien il aurait gagné d'argent dans toute sa carrière. On appelle S_n et T_n les sommes des termes des deux suites étudiées, définies par :
   $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ...u_{n-1} + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + v_2 + ...v_{n-1} + v_n$
   Calculer combien l'employé aurait gagné dans toute sa carrière selon chacune des formules *A* et *B*.

Exercice n°65

1. Une ville A possède 200 000 habitants au 1er janvier 2009. On considère que cette population diminue de 2% par an. On note u_n le nombre d'habitants de la ville A au 1er janvier de l'année $2009 + n$, où *n* est un entier naturel. Ainsi, $u_0 = 200000$.

   a. Calculer u_1 et u_2 .

   b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .En déduire la nature de la suite (u_n) puis l'expression de u_n en fonction de *n*.

   c. Déterminer l'arrondi à l'unité de u_{10}.

2. Une ville B possède 120 000 habitants au 1er janvier 2009.

On note v_n le nombre d'habitants de la ville B au 1er janvier de l'année 2009+n, où n est un entier naturel. Ainsi, $v_0 = 120000$. On considère que, pour tout entier naturel n, $v_n = 120000 \times (1,1)^n$.

Calculer le nombre d'habitants de la ville B au 1er janvier 2011. Déterminer l'arrondi à l'unité de v_{10}.

3. En quelle année la population de la ville B deviendra-t-elle supérieure à celle de la ville A ?

Exercice n°66

Dans une usine, le tableau de production de deux chaînes de montage est le suivant :

Mois	Productions mensuelles chaîne A	Productions mensuelles chaîne B	No de rang des productions
Janvier 2009	2056	1770	1
Février 2009	2069	1805	2
Mars 2009	2082	1840	3
Avril 2009	2095	1875	4

Les productions forment des suites arithmétiques.

1. a. Quelle est la raison de la suite pour la chaîne A ? Justifier.

b. Quelle est la raison de la suite pour la chaîne B? Justifier.

2. En supposant que l'une des productions mensuelles de la chaîne B soit 2 050, quel serait alors son numéro de rang ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n et B_n les productions mensuelles respectives de rang n des chaînes A et B.

a. Exprimer A_n en fonction de n et de A_1.

b. Exprimer B_n en fonction de n et de B_1. Retrouver ainsi le résultat de la question 2.

c. À partir de quelle date (mois et année), la production de la chaîne B serait-elle supérieure ou égale à celle de la chaîne A ?

Exercice n°67

Partie 1

1. On considère la suite arithmétique (θ_n), de raison $\frac{\pi}{2}$ et de premier terme $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

Exprimer θ_{n+1}, en fonction de θ_n .puis θ_n en fonction de n

2. On considère la suite géométrique ρ_n de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\rho_0 = 8$.

Exprimer ρ_{n+1} en fonction de ρ_n ,puis ρ_n en fonction de n

Partie II

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$ graphique : 1 cm).

On considère les nombres complexes z_0, z_1, ……. , z_n de modules respectifs ρ_0, ρ_1 , ….. , ρ_n,

et d'arguments respectifs θ_0, θ_1,……… , θ_n.

On note alors M_0, M_1,……. , M_n les points d'affixes respectives z_0, z_1, ……. , z_n.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3
θ_n	$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$			
ρ_n	$\rho_0 = 8$			

2. En utilisant les résultats du tableau précédent. placer les points M_0 M_1 M_2 et M_3 sur la copie et tracer la ligne brisée $M_0\ M_1\ M_2\ M_3$.

Exercice n°68

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 3}{U_n + 1}$

1) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 < U_n < 3$.

b) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante .

2) On définit la suite (V_n) sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n - 1}$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison égale $\dfrac{1}{2}$.

b) Calculer V_n en fonction de n .

c) Montrer que pour tout entier n on a : $U_n = \dfrac{V_n - 3}{V_n - 1}$. Déduire alors U_n en fonction de n et Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3) Exprimer en fonction de n ; $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} V_k$.

Exercice 1. Suite arithmético-géométrique (comme promis !)

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1/5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{10u_n - 2}{8u_n + 2}$. *Le but de cet exercice est de trouver une formule explicite pour le calcul de (u_n) bien que (u_n) ne soit ni arithmétique ni géométrique.*

1) **a)** Calculer u_1, u_2 et u_3**.**

b) Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1 + 4u_n}{1 - 2u_n}$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b) Préciser le terme général pour le calcul de v_n.

3) En déduire le terme général pour le calcul de u_n.