QCM 1

Esiee, 2000, question 9

Les résultats suivants sont-ils justes (justifier brièvement les réponses…) ?

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \frac{1}{2}$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t dt = \frac{1}{2}$.

c) $\int_1^{e} \ln t dt = 1$.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = 1$.

e) $\int_0^{1} te^t dt = 1$.

QCM 2

Fesic 2002, exercice 5. Répondre simplement par Vrai ou Faux à chaque question.

On rappelle que $2 < e < 3$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{2x}$.

a. La fonction f vérifie l'équation $y'(x) - 2y(x) = e^{2x}$.

b. L'équation $f(x) = -\frac{1}{16}$ a deux solutions distinctes.

Pour α réel, on pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{-1} f(x)dx$.

c. Pour tout réel α, on a : $I(\alpha) = -\frac{1}{4e^2} - \frac{2\alpha+1}{4} e^{2\alpha}$.

d. On a : $\lim_{\alpha \to -\infty} I(\alpha) = +\infty$.

QCM 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$.

a. f est définie sur $]-1\,;1[$.

b. f est croissante sur $]-1\,;1[$.

c. $f(0) = 1$.

d. f est une fonction paire.

e. En écrivant que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)$, on obtient $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

Corrigé QCM 1

a) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

b) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t dt = \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

c) **Vrai** : $\int_1^{\mathrm{e}} \ln t dt = \left[t\ln t - t\right]_1^{e} = 1$.

d) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \left[\frac{1}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2-1=1$.

e) **Vrai** : Intégration par parties, $\int_0^1 te^t dt = \left[(t-1)e^t\right]_0^1 = 1$.

Corrigé QCM 2

a. **Vrai :** $f'(x) = e^{2x} + 2e^{2x}(x+1) = e^{2x}(2x+3)$, on remplace :

$$f'(x) - 2f(x) = e^{2x}(2x+3) - 2(x+1)e^{2x} = e^{2x}$$; c'est bon.

b. **Faux** : Inutile d'essayer de résoudre, ça ne peut pas marcher. Regardons les variations de *f* : comme le texte nous le dit si gentiment on a 2<*e*<3, d'où $\frac{1}{8} > e^{-3} > \frac{1}{27}$ et $-\frac{1}{16} < -\frac{1}{2}e^{-3} < -\frac{1}{54}$. Comme le minimum de *f* est supérieur à $-\frac{1}{16}$, l'équation proposée n'a pas de solution.

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}e^{-3}$	↗	$+\infty$

c. **Vrai :** on a tout intérêt à utiliser l'équation différentielle pour calculer $I(\alpha)$: comme $f'(x) = 2f(x) + e^{2x}$, en intégrant l'égalité, on a :

$$f(x) = 2\int f(x)dx + \frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = \left(\frac{2x+1}{4}\right)e^{2x}.$$

D'où finalement : $I(\alpha) = \int_\alpha^{-1} f(x)dx = \left[\left(\frac{2x+1}{4}\right)e^{2x}\right]_\alpha^{-1} = -\frac{1}{4}e^{-2} - \frac{2\alpha+1}{4}e^{2\alpha} = -\frac{1}{4e^2} - \frac{2\alpha+1}{4}e^{2\alpha}$.

d. **Faux** : $\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = -\frac{1}{4e^2} - 0 = -\frac{1}{4e^2}$ (il faut utiliser $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$).

Rappel : somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0, de raison q : $u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Corrigé QCM 3

a. VRAI : la fonction $\frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $]-1\,;1[$, elle a donc une primitive qui est continue.

b. VRAI : $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}>0$ sur $]-1\,;1[$.

c. FAUX : $f(0)=0$.

d. FAUX : L'intégrale d'une fonction paire est une fonction impaire (à justifier).

e. FAUX : $\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\Rightarrow\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{-1}{1-t}dt+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|1+x|$,

soit $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.