1. 1. Calcul de primitives

a. $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$;

Correction : $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2x+2}{(x^2+2x)^3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u^3(x)}=\dfrac{1}{2}u'(x)u^{-3}(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{-2}\times(-2)u'(x)u^{-3}(x)$,

u(x) = x^2+2x, $n-1=-3$, $n=-2$, $F(x)=-\dfrac{1}{4}(x^2+2x)^{-2}=-\dfrac{1}{4(x^2+2x)^2}$.

b. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

Correction : $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-1$, $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln u(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)+k$.

c. $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction : $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}=x-1+\dfrac{1}{x}\times\ln x=x-1+\dfrac{1}{2}\times 2u'(x)\times u(x)$ avec $u(x)=\ln x$,

$F(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}u^2(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+k$.

1. 2. Basique 1

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Soit la fonction f, définie par $f(x)=(\sin^2 x-3\sin x+8)\cos x$.

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de f telle que $F(\frac{3\pi}{2})=0$.

Correction

$f(x)=(\sin^2 x-3\sin x+8).\cos x=\cos x\times\sin^2 x-3\cos x\times\sin x+8\cos x$;

u(x) = $\sin^3 x$, u'(x) = $3\cos x\sin^2 x$, v(x) = $\sin^2 x$, v'(x) = $2\cos x\sin x$, w(x) = $\sin x$, w'(x) = $\cos x$.

$F(x)=\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{3}{2}\times\sin^2 x+8\times\sin x+k$.

$F(\frac{3\pi}{2})=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\sin^3\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{3}{2}\times\sin^2\dfrac{3\pi}{2}+8\times\sin\dfrac{3\pi}{2}+k=0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}-8+k=0\Leftrightarrow k=\dfrac{2+9+48}{6}=\dfrac{59}{6}$.

$F(x)=\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{3}{2}\sin^2 x+8\sin x+\dfrac{59}{6}$.

1. 3. Basique 2

1. Montrer que $x^3+5x^2+7x+4=(x+3)(x^2+2x+1)+1$.

2. En déduire une primitive de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1}$ sur $]-\infty\,;-1[$.

Correction

$f(x)=\dfrac{x^3+5x^2+7x+4}{x^2+2x+1}=\dfrac{(x+3)(x^2+2x+1)+1}{x^2+2x+1}=x+3+\dfrac{1}{x^2+2x+1}=x+3+\dfrac{1}{(x+1)^2}$. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{1}{x+1}$.

1. 4. Centre de gravité (d'après bac pro)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : Calcul d'une primitive

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

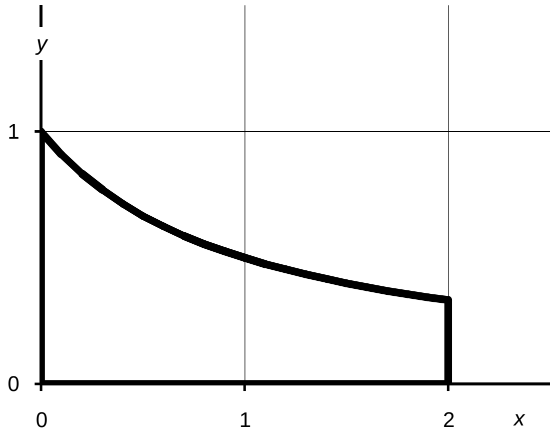
1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 2], $g(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$.

2. En déduire une primitive de g sur l'intervalle [0 ; 2].

Partie B : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène

On note f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2] par : $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

On considère une plaque homogène formée par l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan dont les coordonnées vérifient les relations : $0\le x\le 2$ et $0\le y\le f(x)$. (Voir schéma ci-dessous).



1. Soit S l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire. Calculer S.
2. Soit G le centre de gravité de la plaque. On admettra que les coordonnées (X ; Y) de G sont données par les formules suivantes : $X=\frac{1}{S}\int_0^2 xf(x)\,dx$ et $Y=\frac{1}{2S}\int_0^2\left[f(x)\right]^2 dx$.

a. Calculer la valeur exacte de X, puis une valeur approchée arrondie au centième.
b. Calculer la valeur exacte de Y, puis une valeur approchée arrondie au centième.

Correction

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $g(x)=\frac{x}{x+1}$.

A. 1. $g(x)=1-\frac{1}{x+1}$.

2. $\int g = x-\ln(x+1)$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

B. 1. $S=\int_0^2 g(x)\,dx=2-\ln 3-0+\ln 1=2-\ln 3$.

B. 2. a. $X=\frac{1}{2S}\int_0^2 x\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2S}\int_0^2 x-\frac{x}{x+1}\,dx=\frac{1}{2S}\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)\right]_0^2=\frac{\ln 3}{2(2-\ln 3)}\approx 0,61$.

b. $Y=\frac{1}{2S}\int_0^2\left[f(x)\right]^2 dx=\frac{1}{2S}\int_0^2\left[1-\frac{1}{x+1}\right]^2 dx=\frac{1}{2S}\int_0^2 1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=\frac{1}{2S}\left[x-2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]_0^2$, soit

$Y=\frac{1}{2S}\left(2-2\ln 3-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{8-6\ln 3}{6(2-\ln 3)}\approx 0,26$.

1. 5. QCM 1

Esiee, 2000, question 9

Les résultats suivants sont-ils justes (justifier brièvement les réponses…) ?

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}$. b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\,dt=\frac{1}{2}$.

c) $\int_1^{e}\ln t\,dt=1$. d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt=1$. e) $\int_0^{1}te^t\,dt=1$.

Correction

a) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,dt=\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$. b) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

c) **Vrai** : $\int_1^{e}\ln t\,dt=\left[t\ln t-t\right]_1^{e}=1$. d) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt=\left[\frac{1}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=2-1=1$.

e) **Vrai** : Intégration par parties, $\int_0^{1}te^t\,dt=\left[(t-1)e^t\right]_0^{1}=1$.

1. 6. QCM 2

Fesic 2002, exercice 5. Répondre simplement par Vrai ou Faux à chaque question.

On rappelle que 2 < e < 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^{2x}$.

a. La fonction f vérifie l'équation $y'(x)-2y(x)=e^{2x}$.

b. L'équation $f(x)=-\frac{1}{16}$ a deux solutions distinctes.

Pour α réel, on pose $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{-1} f(x)dx$.

c. Pour tout réel α, on a : $I(\alpha)=-\frac{1}{4e^2}-\frac{2\alpha+1}{4}e^{2\alpha}$.

d. On a : $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)=+\infty$.

Correction

a. **Vrai :** $f'(x)=e^{2x}+2e^{2x}(x+1)=e^{2x}(2x+3)$, on remplace :

$$f'(x)-2f(x)=e^{2x}(2x+3)-2(x+1)e^{2x}=e^{2x}$$; c'est bon.

b. **Faux** : Inutile d'essayer de résoudre, ça ne peut pas marcher. Regardons les variations de f : comme le texte nous le dit si gentiment on a $2<e<3$, d'où $\frac{1}{8}>e^{-3}>\frac{1}{27}$ et $-\frac{1}{16}<-\frac{1}{2}e^{-3}<-\frac{1}{54}$. Comme le minimum de f est supérieur à $-\frac{1}{16}$, l'équation proposée n'a pas solution.

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}e^{-3}$	$\nearrow$	$+\infty$

c. **Vrai :** on a tout intérêt à utiliser l'équation différentielle pour calculer $I(\alpha)$: comme $f'(x)=2f(x)+e^{2x}$, en intégrant l'égalité, on a :

$$f(x)=2\int f(x)dx+\frac{1}{2}e^{2x}\Rightarrow\int f(x)dx=\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}=\left(\frac{2x+1}{4}\right)e^{2x}.$$

D'où finalement : $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{-1} f(x)dx=\left[\left(\frac{2x+1}{4}\right)e^{2x}\right]_{\alpha}^{-1}=-\frac{1}{4}e^{-2}-\frac{2\alpha+1}{4}e^{2\alpha}=-\frac{1}{4e^2}-\frac{2\alpha+1}{4}e^{2\alpha}$.

d. **Faux** : $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)=-\frac{1}{4e^2}-0=-\frac{1}{4e^2}$ (il faut utiliser $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$).

Rappel : somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0, de raison q : $u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

1. 7. QCM 3

Soit f la fonction définie par $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$.

a. f est définie sur $]-1;1[$.

b. f est croissante sur $]-1;1[$.

c. $f(0)=1$.

d. f est une fonction paire.

e. En écrivant que $\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$, on obtient $f(x)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

Correction

a. VRAI : la fonction $\frac{1}{1-t^2}$ est continue sur $]-1;1[$, elle a donc une primitive qui est continue.

b. VRAI : $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}>0$ sur $]-1;1[$.

c. FAUX : $f(0)=0$.

d. FAUX : L'intégrale d'une fonction paire est une fonction impaire (à justifier).

e. FAUX : $\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\Rightarrow\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{-1}{1-t}dt+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|1+x|$,

soit $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

1. 8. Calcul d'intégrales, fonction rationnelle

1. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout u différent de $\frac{1}{2}$, $\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}$.

2. Calculer $\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

3. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$.

Correction

1. $\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}=\frac{2au^2-au+2bu-b+c}{2u-1}\Rightarrow\begin{cases}2a=1\\2b-a=0\\c-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1/2\\b=1/4\\c=-3/4\end{cases}\Rightarrow f(u)=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}-\frac{3/4}{2u-1}$.

2. $\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\frac{2}{2x-1}dx=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\ln|2x-1|\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\ln|-2-1|\right)$

soit $\frac{3}{8}\ln 3$.

3. La fonction à intégrer ressemble un peu à la précédente en prenant $u=\sin x$:

$f(u)=\frac{u^2-1}{2u-1}\Rightarrow f(\sin x)=\frac{\sin^2 x-1}{2\sin x-1}=\frac{\cos^2 x}{1-2\sin x}$; pour pouvoir intégrer $f(\sin x)$, il faut que ce soit sous la forme $(\sin x)'F'(\sin x)=(\cos x)F'(\sin x)$ où F est une primitive de f. Or on a à intégrer

$\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}=\cos x\left[\frac{\cos^2 x}{1-2\sin x}\right]=\cos x\left[\frac{1-\sin^2 x}{1-2\sin x}\right]$ donc tout va bien.

On a finalement $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx=\left[\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin x-\frac{3}{8}\ln|2\sin x-1|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0}=\frac{3}{8}\ln 2$.

1. 9. Fonction rationnelle, France 2004

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$: $g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I=\int_{2}^{3}\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx$. On donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$ avec p et q rationnels.

Correction

1. $g(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$.

a. $g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}=\frac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x+1)(x-1)}$ d'où on tire par identification :

$\begin{cases}a+b+c=0\\c-b=0\\-a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=1\\c-b=0\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1/2\\c=1/2\\a=-1\end{cases}$. On a donc $g(x)=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$.

b. $\int g(x)dx=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|\Rightarrow G(x)=-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)$ (ne pas oublier les valeurs absolues au départ, on les supprime par la suite car on est sur $]1\,;+\infty[$).

2. Pour trouver une primitive de $f(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$, il suffit d'utiliser $\int u'u^n dx=\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ avec $u=x^2-1$ et $n=-2$: $\int f(x)dx=\frac{1}{-2+1}(x^2-1)^{-2+1}=\frac{-1}{x^2-1}$.

3. A première vue (et même à seconde vue) il faut intégrer par parties :

$u=\ln x,\ v'=\frac{2x}{(x^2-1)^2}\Rightarrow u'=\frac{1}{x},\ v=\frac{-1}{x^2-1}$,

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

ce qui donne

$$I=\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x dx=\left[\frac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3+\int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2+\left(-\ln 3+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 1\right)$$

$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2-\ln 3+\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3=-\frac{13}{8}\ln 3+\frac{17}{6}\ln 2.$$