1. 10. ROC, Pondicherry 2005

On considère la fonction *f*, définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$.

Fomesoutra.com ça soutra ! Docs à portée de main

1. a. Justifier la continuité de *f* sur $[1\,;+\infty[$.

b. Montrer que *f* est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

Pour tout réel x_0 de $[1\,;+\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant *f* dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$.

a. Que vaut $A(1)$?

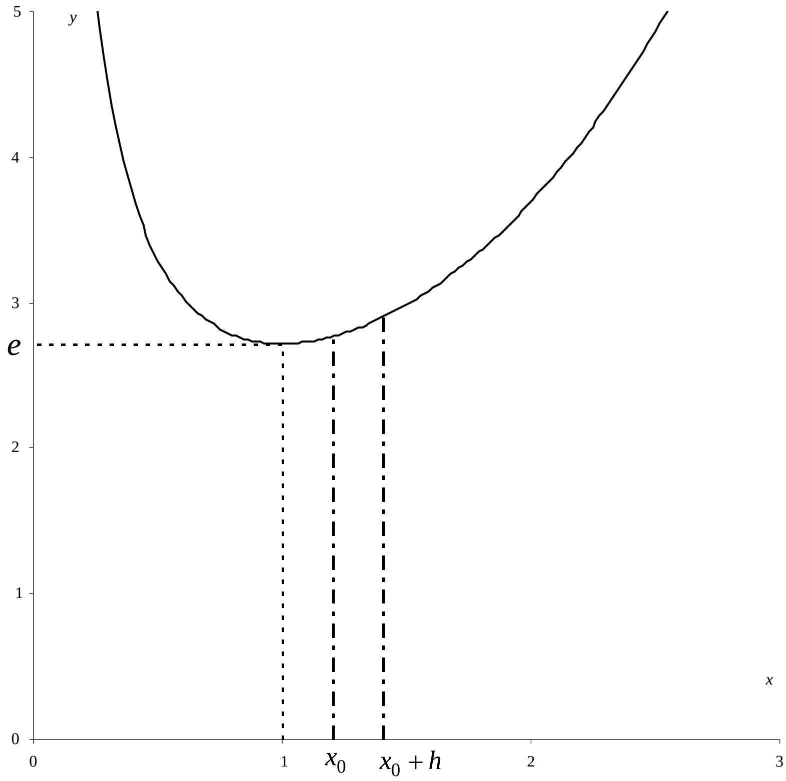
b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\,;+\infty[$ et *h* un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0)\le\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\le f(x_0+h).$$

c. Lorsque $x_0\ge 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h<0$ et tel que $x_0+h\ge 1$?

d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction *A* ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction *A*.

e. Conclure.



Correction

1. a. *f* est continue sur $[1\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

b. $f'(t)=\dfrac{e^t t-e^t}{t^2}=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$; e^t et t^2 sont évidemment positifs, $t-1$ l'est également lorsque $t\ge 1$. Donc *f* est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

a. $A(1)$ vaut 0.

b. Sur $[1\,;+\infty[$ *f* est croissante ainsi que *A*. La différence $A(x_0+h)-A(x_0)$ représente l'aire de la bande sous la courbe de *f*, comprise entre les droites $x=x_0$ et $x=x_0+h$: cette bande a une aire supérieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0)$ et de largeur *h*, et inférieure à celle du rectangle de hauteur $f(x_0+h)$ et de largeur *h*. On a donc

$$hf(x_0)\le A(x_0+h)-A(x_0)\le f(x_0+h)h$$

d'où l'encadrement demandé en divisant par *h* puisque *h* est positif.

c. Si on prend $h<0$, ça ne change pas grand-chose sur le fond, il y a surtout des questions de signes à respecter : la bande sous la courbe de *f* a pour aire $A(x_0)-A(x_0+h)$, le rectangle inférieur a pour aire $f(x_0+h)(-h)$ et le rectangle supérieur a pour aire $f(x_0)(-h)$; on a donc $(-h)f(x_0+h)\leq A(x_0)-A(x_0+h)\leq(-h)f(x_0)\Leftrightarrow hf(x_0+h)\leq A(x_0+h)-A(x_0)\leq hf(x_0)$, soit

$$f(x_0+h)\geq\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\geq f(x_0)$$

en divisant par *h* (attention au changement de sens des inégalités : *h* est négatif).

d. On a le même encadrement pour *h* positif ou négatif, on peut passer à la limite lorsque *h* tend vers 0, ce qui donne $f(x_0)\geq\lim\limits_{h\to 0}\frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h}\geq f(x_0)\Rightarrow A'(x_0)=f(x_0)$ puisqu'on retrouve le nombre dérivé de *A* au milieu de l'encadrement.

e. Conclusion du cours : l'aire sous la courbe de *f* entre $x=1$ et $x=x_0$ est obtenue en trouvant une primitive de *f* (la fonction *A*) telle que *A*(1)=0.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

1\. 11. Approximation d'aire, Polynésie 2007

6 points

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=1+x\ln x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire ***A*** du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

On note *M* et *N* les points de (C_f) d'abscisses respectives 1 et 2, *P* et *Q* leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée plus bas.

1\. a. Montrer que *f* est positive sur $[1\,;2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (*MN*) est $2\ln 2$.

c. Soit *E* le point d'abscisse $\frac{4}{e}$. Montrer que sur l'intervalle $[1\,;2]$, le point *E* est l'unique point de (C_f) en lequel la tangente à (C_f) est parallèle à (*MN*).

d. On appelle (T) la tangente à (C_f) au point *E*. montrer qu'une équationde (T) est : $y=(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1$.

2\. Soit *g* la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$.

a. Montrer que $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour tout *x* de $[1\,;2]$.

b. Etudier les variations de *g* sur $[1\,;2]$ et en déduire la position relative de (C_f) et de (T) sur cet intervalle.

3\. Soient *M'* et *N'* les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite (T). On admet que la courbe (C_f) reste sous la droite (*MN*) sur l'intervalle $[1\,;2]$ et que les points *M'* et *N'* ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes *MNQP* et *M'N'QP*.

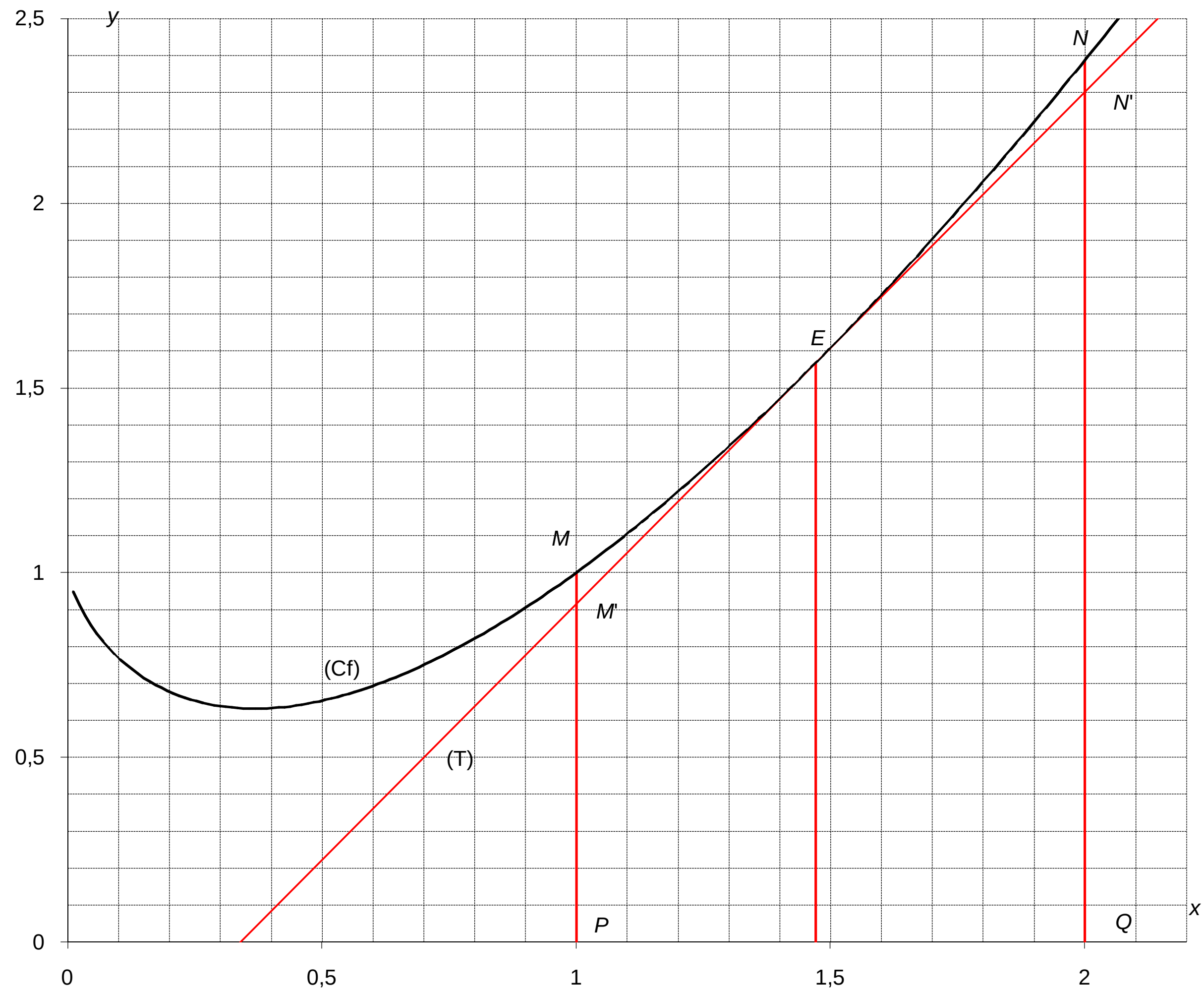
b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de ***A*** d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de ***A***.

1\. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

2\. En déduire la valeur exacte de ***A***.



Correction

Partie A

1. a. $\ln x > 0$ sur $[1\,;2]$ donc *f* est positive sur $[1\,;2]$.

b. *M* a pour coordonnées $(1\,;1)$, *N* $(2\,;1+2\ln 2)$; le coefficient directeur de la droite (*MN*) est

$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-2\ln 2}{-1} = 2\ln 2$.

c. La dérivée de *f* est : $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$; la tangente à (C_f) est parallèle à (*MN*) lorsque

$\ln x + 1 = 2\ln 2 \Leftrightarrow x = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{1}{e}\left(e^{\ln 2}\right)^2 = \frac{4}{e}$.

d. $y = 2\ln 2\left(x - \frac{4}{e}\right) + \left(1 + \frac{4}{e}\ln\left(\frac{4}{e}\right)\right) = (2\ln 2)x - 2\ln 2 \times \frac{4}{e} + 1 + \frac{4}{e}\ln 4 - \frac{4}{e} = (2\ln 2)x + 1 - \frac{4}{e}$ $(\ln 4 = 2\ln 2)$.

2. Soit *g* la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1\right]$.

a. $g'(x) = f'(x) - 2\ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right)$.

b. $g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{x}{4} \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{e}$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Lorsque $x = \frac{4}{e}$, *g* est nulle ; donc décroissante jusqu'à $\frac{4}{e}$ puis croissante, le minimum est 0 ; conclusion $g(x) \geq 0$ et (C_f) est au-dessus de (T).

3. a. Il nous faut les ordonnées de *M'* et *N'* : $y_{M'} = (2\ln 2) + 1 - \frac{4}{e}$, $y_{N'} = (4\ln 2) + 1 - \frac{4}{e}$.

Aire de *MNQP* : $\frac{(PM + QN)}{2} \times PQ = \frac{(y_M + y_n)}{2} \times 1 = 1 + \ln 2 \approx 1{,}693$;

aire de $M'N'QP$: $\dfrac{(PM'+QN')}{2}\times PQ=\dfrac{(y_{M'}+y_{N'})}{2}\times 1=3\ln 2+1-\dfrac{4}{e}\approx 1,608$;

b. L'aire ***A*** est comprise entre ces deux valeurs : 1,6 à 10^{-1} près.

Partie B

1. On pose $u'=x,\ v=\ln x\Rightarrow u=\dfrac{1}{2}x^2,\ v'=\dfrac{1}{x}$ d'où

$$\int_1^2 x\ln x dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}dx=2\ln 2-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}\approx 0,636 \quad .$$

2. $\boldsymbol{A}=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 1dx+\int_1^2 x\ln x dx=1+2\ln 2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}+2\ln 2\approx 1,636$.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

<u>1. 12. Aires, Am. du Nord 2006</u>

5 points

1. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$. On donne ci-dessous le tableau de variations de g.

x	0	2,3	x_0	2,4	$+\infty$
g	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

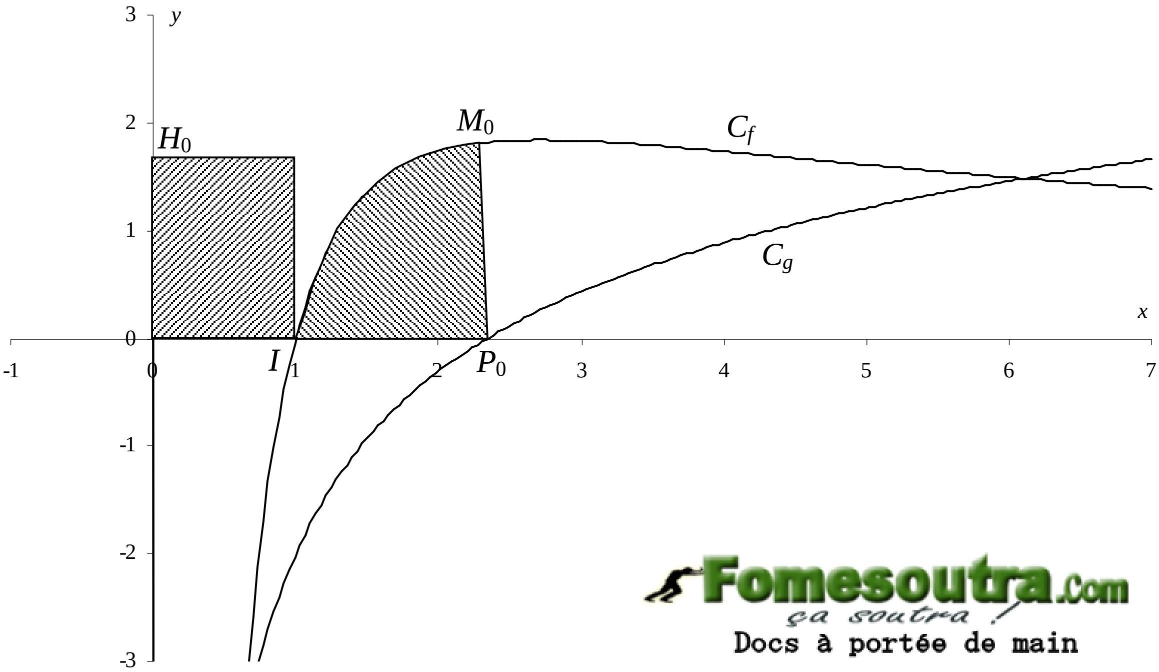
Démontrer **toutes** les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5\ln x}{x}$.

a. Démontrer que $f(x_0)=\dfrac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b. Soit a un réel. Pour $a>1$, exprimer $\int_1^a f(t)\,dt$ en fonction de a.

3. On a tracé dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement (C_f) et (C_g). On appelle I le point de coordonnées $(1\,;0)$, P_0 le point d'intersection de (C_g) et de l'axe des abscisses, M_0 le point de (C_f) ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.



Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

On nomme D_1 le domaine plan délimité par la courbe (C_f) et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$. On nomme D_2 le domaine plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.
Démontrer que les deux domaines D_1 et D_2 ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.

Correction

1. $g(x) = \ln x - \dfrac{2}{x}$.

x	0	2,3	x_0	2,4	$+\infty$
g	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Limite en 0 : ln tend vers $-\infty$ de même que $-\dfrac{2}{x}$; limite en $+\infty$: ln tend vers $+\infty$, $-\dfrac{2}{x}$ tend vers 0.

$g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} > 0$ donc g est croissante ; comme elle est continue, elle s'annule une seule fois.

On a $g(2,3) \approx -0,04$ et $g(2,4) \approx 0,04$ donc $2,3 \le x_0 \le 2,4$.

2. a. $f(x_0) = \dfrac{5\ln x_0}{x_0} = 5\dfrac{2/x_0}{x_0} = \dfrac{10}{x_0^2}$ car $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \dfrac{2}{x_0}$.

b. On se rappelle que la dérivée de $\ln t$ est $\dfrac{1}{t}$ et qu'une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$:

$$\int_1^a f(t)\,dt = 5\int_1^a \frac{\ln t}{t}\,dt = 5\int_1^a \frac{1}{t}\ln t\,dt = 5\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^a = \frac{5}{2}(\ln a)^2 - \frac{5}{2}(\ln 1)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2.$$

3. L'abscisse de P_0 est x_0 donc l'ordonnée de M_0 est $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^2}$. L'aire de D_1 est

$\displaystyle\int_1^{x_0} f(t)\,dt = \frac{5}{2}(\ln x_0)^2 = \frac{5}{2}\left(\frac{4}{x_0^2}\right) = \frac{10}{x_0^2} = f(x_0)$, soit l'aire du domaine D_2.

Comme $2,3 \le x_0 \le 2,4$, $1,89 \ge \dfrac{10}{x_0^2} \ge 1,74\ldots$