COLLEGE PYTHAGORE 2 GAGNOA

DEVOIR N°3

CE Mathématiques

MATHEMATIQUES

Année scolaire 2023-2024
Niveau : Tle D
Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chaque énoncé, écris le numéro de l'énoncé suivi de vrai si l'énoncé est vrai ou de faux si l'énoncé est faux.

1) La fonction logarithme de base 7 se note $\frac{\log(x)}{7}$. $(x > 0)$

2) Si pour tout entier naturel n, $|u_n| < 1$, alors la suite (u_n) est bornée.

3) La suite (v_n) définie par $v_1 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}; v_{n+1} = -3v_n^2$ est une suite géométrique.

4) Pour tous réels a et b strictement positifs, log $(a \times b)$ = log(a) × log (b)

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacune des propositions suivantes trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Écris le numéro de la proposition suivi de la lettre qui correspond à la bonne réponse.

N°	ÉNONCE	REPONSES	
1	Soit f une fonction continue sur un intervalle K et F une fonction dérivable sur K. Si F est une primitive de f sur K, alors pour tout nombre réel x de K...	A	$F'(x) = f'(x)$
		B	$F'(x) = f(x)$
		C	$f'(x) = F(x)$
2	La fonction $x \longmapsto \log(x)$ est derivable sur $]0; +\infty[$ et a pour dérivée	A	$x \longmapsto \frac{1}{x\ln 10}$
		B	$x \longmapsto \frac{x}{\ln 10}$
		C	$x \longmapsto \frac{x}{10}$
3	La suite (u_n) tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_n - \frac{5}{2}$ est...	A	une suite arithmétique
		B	une suite géométrique
		C	ni une suite arithmétique ni une suite géométrique
4	Si (v_n) est une suite arithmétique de raison r, alors la somme $v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{40}$ est égal à....	A	$40 \times \frac{v_0 + v_{40}}{2}$
		B	$r \times \frac{v_0 + v_{40}}{2}$
		C	$41 \times \frac{v_0 + v_{40}}{2}$

EXERCICE 3 (3 points)

On pose $P(x) = -x^3 + 7x - 6$.

1) a- Vérifie que 1 est une racine de P.

b- Justifie que $P(x) = (x - 1)(-x^2 - x + 6)$

2) a-Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E') : $-x^2 - x + 6 = 0$.

b- En déduis que les solutions de l'équation $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ sont : 1 ; 2 et -3

3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $-(\ln x)^3 + 7\ln x - 6 = 0$

EXERCICE 4 (3 points)

Soit g la fonction définie sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[$ par $g(x) = \frac{8x^2 + 3x + 2}{x(2x+1)^2}$

1) Justifie que $\forall x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[\ g(x) = \frac{2}{x} - \frac{5}{(2x+1)^2}$.

2) Détermine les primitives G de g sur $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[$

3) Détermine la primitive H de g qui s'annule en -1

EXERCICE 5 (5 points)

Soit la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, par $g(x) = x - 1 - 2lnx$ et $\begin{cases} \forall\ x \in\ ]0\ ;\ 1[\cup\ ]\alpha\ ;\ +\infty[\ , g(x) > 0 \\ \forall\ x \in\ ]1\ ;\ \alpha[\ , g(x) < 0 \end{cases}$

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x\ln x\ ,\ si\ > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) a-Justifie que f est continue en 0.

b-Justifie que f n'est pas dérivable en 0, puis interprète graphiquement le résultat.

2) a- Justifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

b- Interprète graphiquement les résultats de question 2) a-.

3) La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

a- Justifie que $\forall\ x\ \in\ ]0\ ;\ +\infty[\ , f'(x) = g(x)$.

b- En utilisant la consigne 4) de la partie A, étudie les variations de f.

c-Dresse le tableau de variation de f.

4) Construis (C_f) ***(On prendra*** $\boldsymbol{\alpha = 3,5}$***)***

Exercice 6 (5 points)

Lors d'une expérience portant sur l'efficacité d'un bactéricide, des élèves introduisent ce produit dans un milieu où une population de bactéries croissait. La population a continué à croitre pendant un certain temps puis elle a commencé à diminuer. La taille de la population à l'instant t non nul est une fonction g dont la dérivée est donnée par :

$f'(t) = -10^3t^2 + 3 \times 10^3t + 10^4$ est telle que $f(0) = 10^3$.

$f(t)$ est le nombre de bactéries et t le temps en heures.

Le bactéricide est jugé efficace si après son introduction, le maximum de la population de bactéries est inférieure à 90 000.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, apprécie l'efficacité de ce bactéricide