Collège les AS	DEVOIR DE NIVEAU N°5	Année : 2023-2024 Date : 06/03/2024
	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	Niveau : T^{le}D Durée : 4h

EXERCICE 1 : Ecris sur ta copie le numéro de chacune des affirmations ci – dessous suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	La fonction exponentielle népérienne est une la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien V
2	La partie réelle du nombre complexe Z définie par : $Z = (x+2)i + 5x - 4$ est $x + 2$ F
3	Soit (u_n) une suite numérique à terme positif. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite (u_n) est croissante V
4	La suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$ est une suite géométrique de raison 2 F

EXERCICE 2 : Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont données dont une seule est correcte. Tu écriras le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	PROPOSITION	Réponses		
		A	B	C
1	La forme algébrique de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ est	$\frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	La suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = \frac{1-4n}{n-1}$ est	Croissante	Décroissante	N'est pas monotone
3	$\lim_{x\to+\infty}\left[-x + (x - \frac{1}{2})e^{-2x+3}\right] =$	$+\infty$	0	$-\infty$
4	Soit le nombre complexe $Z = (2x+8) + i(5x-2)$. La valeur de x pour que Z soit un imaginaire pure est :	$x = -4$	$x = \frac{2}{3}$	$x = 4$

EXERCICE 3 :

Soit $Z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$, $Z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$

1- a) Calcule le module et un argument de Z_1 et Z_2

b) En déduis le module et un argument de Z

2- a) Ecris le nombre complexe Z sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique

b) Déduis les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$

EXERCICE 4

1- Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $\forall n \in$ IN ; $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1$

a) Démontre par récurrence que $\forall n \in$ IN ; la suite (u_n) est majorée par $\frac{5}{2}$.

b) Montre que la suite (u_n) est croissante .

c) En déduis la convergence de (u_n)

2- Soit (v_n) la suite définie sur IN par : $v_n = \boldsymbol{u_n} - \frac{5}{2}$

a) Démontre que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la **raison** et **le premier terme**

b) Exprime (v_n) puis (u_n) en fonction de n

c) Calcule la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 5

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par : $\boldsymbol{g(x) = 1 + (2x - 3)e^{-2x}}$ dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1 + e^{-4}$	$\searrow$	1

a) Montre que l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty; 2[$

b) Vérifie que $\boldsymbol{0,3 < \alpha < 0,4}$

Par la suite on admet que $\forall \boldsymbol{x} \in]-\infty; \boldsymbol{\alpha}[, \boldsymbol{g(x) < 0}$ et $\forall \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{\alpha}; +\infty[, \boldsymbol{g(x) > 0}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur IR par : $\boldsymbol{f(x) = x - (x - 1)e^{-2x}}$ et (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère (O ;I,J) unité : **2cm**

1- a) Calcule la limite de $\boldsymbol{f(x)}$ et de $\boldsymbol{\frac{f(x)}{x}}$ en $-\infty$

b) Interprète graphiquement les résultats des limites

2- a) Calcule limite de $\boldsymbol{f}$ en $+\infty$

b)Montre que la droite (Δ): $\boldsymbol{y = x}$ est une asymptote oblique à $\boldsymbol{(C_f)}$ en $+\infty$

c) Etudie la position relative de $\boldsymbol{(C_f)}$ par rapport à $\boldsymbol{(\Delta)}$

3- a) Montre que $\forall \in \boldsymbol{IR}; \boldsymbol{f'(x) = g(x)}$

b) En déduis les variations de $\boldsymbol{f}$ et dresse son tableau de variation

4- Trace la courbe $\boldsymbol{(C_f)}$ et ses asymptotes dans le repère (O ;I ,J)

EXERCICE 6 :

Une société ivoirienne de transformation de produits agricoles a acheté **5 000 tonnes** de noix de cajou aux paysans **en 2011**. La société décide d'augmenter de **5%** ses achats chaque année par rapport à l'année précédente. Le comptable veut connaitre l'année à partir de laquelle la quantité de noix de cajou achetée sera supérieure à **10 000 tonnes**.

A l'aide de tes connaissances mathématiques et d'un raisonnement cohérent et logique, aide ce comptable à déterminer l'année à partir de laquelle la quantité de noix de cajou sera supérieure à **10 000 tonnes**.