Corrigé

Exercice 1

1. **Résolution l'équation différentielle (E) :** $u''+3600\pi^2 u=0 \Leftrightarrow u''+(60\pi)^2 u=0$

Donc : $u(t)=A\cos(60\pi t)+B\sin(60\pi t)$

2. **Recherche de la solution particulière f vérifiant les deux conditions initiales :**

On a : $f(t)=A\cos(60\pi t)+B\sin(60\pi t)$ Donc : $f'(t)=-60\pi A\sin(60\pi t)+60\pi B\cos(60\pi t)$

$$f\left(\frac{1}{180}\right)=0 \Leftrightarrow A\cos\left(\frac{60\pi}{180}\right)+B\sin\left(\frac{60\pi}{180}\right)=0 \Leftrightarrow A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$A+B\sqrt{3}=0$$

$$f'(0)=-60\pi A\sin(60)+60\pi B\cos(60)=-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 60\pi B=-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow B=-\frac{1}{120}$$

En utilisant la première relation entre A et B, on trouve : $A=-B\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{120}$

Donc, la solution de (E) vérifiant les deux conditions initiales est donnée par :

$$f(t)=\frac{\sqrt{3}}{120}\cos(60\pi t)-\frac{1}{120}\sin(60\pi t)$$

3. a) On utilise la formule d'addition : $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$$f(t)=\frac{1}{60}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(60\pi t)-\frac{1}{2}\sin(60\pi t)\right)=\frac{1}{60}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(60\pi t)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(60\pi t)\right)$$

Donc, on a bien : $f(t)=\frac{1}{60}\cos\left(60\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$

3. b) **Calcul de la valeur moyenne :**

Soit F une primitive de $f : F(t)=\frac{1}{3600}\sin\left(60\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$

$$I_m=90\int_0^{1/90} f(t)dt=90\left[F(t)\right]_0^{1/90}=90\left(F\left(\frac{1}{90}\right)-F(0)\right)=90\left(\frac{1}{3600}\sin\left(\frac{60\pi}{90}+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{3600}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$I_m=90\left(\frac{1}{3600}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{7200}\right)=\frac{1}{40}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{40}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

Donc la valeur moyenne sur cet intervalle est nulle.

Exercice 2

1.a) On a : $y(t)=f(t)-20$ .Donc : $y'(t)=f'(t)$

Or, on sait que : $f'(t)=a\left[f(t)-20\right]$ d'où $y'(t)=a\,y(t)$

Donc la fonction y est bien solution de l'équation différentielle $y'=a\,y$.

1. b) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'=a\,y$ est donnée par $y(t)=Ce^{at}$ où C est un réel.

1. c) On a : $y(t)=f(t)-20$ donc $f(t)=y(t)+20=Ce^{at}+20$ où C est un réel.

1. d) On utilise la condition initiale $f(0)=220$: $f(0)=220 \Leftrightarrow Ce^0+20=220 \Leftrightarrow C+20=220 \Leftrightarrow C=200$.

Donc la solution est donnée par : $f(t) = 200e^{at} + 20$

2. a) On sait que $f\left(\frac{1}{4}\right) = 60$: $f\left(\frac{1}{4}\right) = 60 \Leftrightarrow 200e^{\frac{a}{4}} + 20 = 60 \Leftrightarrow 200e^{\frac{a}{4}} = 40 \Leftrightarrow e^{\frac{a}{4}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{a}{4}}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{a}{4} = -\ln 5 \Leftrightarrow a = -4\ln 5$. Donc : $f(t) = 200e^{(-4\ln 5)t} + 20$

2. b) Température au bout d'une demi-heure, donc pour $t = \frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 200e^{(-4\ln 5)\frac{1}{2}} + 20 = 200e^{-2\ln 5} + 20 = 28$

Donc la température est de 28°C au bout d'une demi-heure.

Problème

Partie A

1. • le point A de coordonnées (0 ; −1) appartient à la courbe C signifie que $f(0) = -1$
   • la courbe C admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses signifie que $f'(0) = 0$
   • $f(1) = 2e$.
   On va convertir ces hypothèse sous forme d'équation :
   La première condition se traduit par : $f(0) = (a\times 0 + b\times 0 + c)e^0 = c = -1$
2. Calculons la fonction dérivée de f : on a :
   $f'(x) = (2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x = (ax^2+(2a+b)x+(b+c))e^x$. $f'(x) = (ax^2+(2a+b)x+(b+c))e^x$
   La deuxième condition se traduit par : $f'(0) = (b+c)e^0 = 0$, donc $b+c=0$ et $b=-c=1$
   $f(1) = 2e$ se traduit par : $f(1) = (a+b+c)e^1 = 2e$, donc $a+b+c=2$, donc $a = 2-b-c = 2-1+1 = 2$.

Partie B

1. $f(x) = \left(2x^2+x-1\right)e^x$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2+x-1) = 2\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$
   et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, comme produit des limites .
2. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ et $f(x) = \left(2x^2+x-1\right)e^x = 2x^2e^x + xe^x - e^x$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.On déduit que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontal à la courbe C au voisinage de $-\infty$.
3. $f'(x) = (2x^2+(4+1)x)e^x = x(2x+5)e^x$, donc $f'(x) = x(2x+5)e^x$.
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = -5/2$, puisque ($e^x > 0$)
   D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-5/2$		0		$+\infty$
x		−		−	0	+	
$2x+5$		−	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

x	$-\infty$		$-5/2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	9	↘	$-e^{-1}$	↗	$+\infty$

4. $f(x)=\left(2x^2+x-1\right)e^x$: $f(x)=0\Leftrightarrow\left(2x^2+x-1\right)e^x=0\Leftrightarrow\left(2x^2+x-1\right)=0$

$\Delta=b^2-4ac=1-4(2)(-1)=9>0$, donc on a : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-3}{2\times2}=-\dfrac{4}{4}=-1$ et

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+3}{2\times2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$, $f(-1)=0$ et $f(\dfrac{1}{2})=0$

par conséquent la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points A et B des coordonnées respectives $A(-1;0)$ et $B(1/2;0)$.

x	-5	-4	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	$0,75$	1
$f(x)$	$0,3$	$0,45$	$0,70$	$0,74$	$0,68$	$0,45$	0	$-0,60$	-1	0	$1,85$	$5,44$

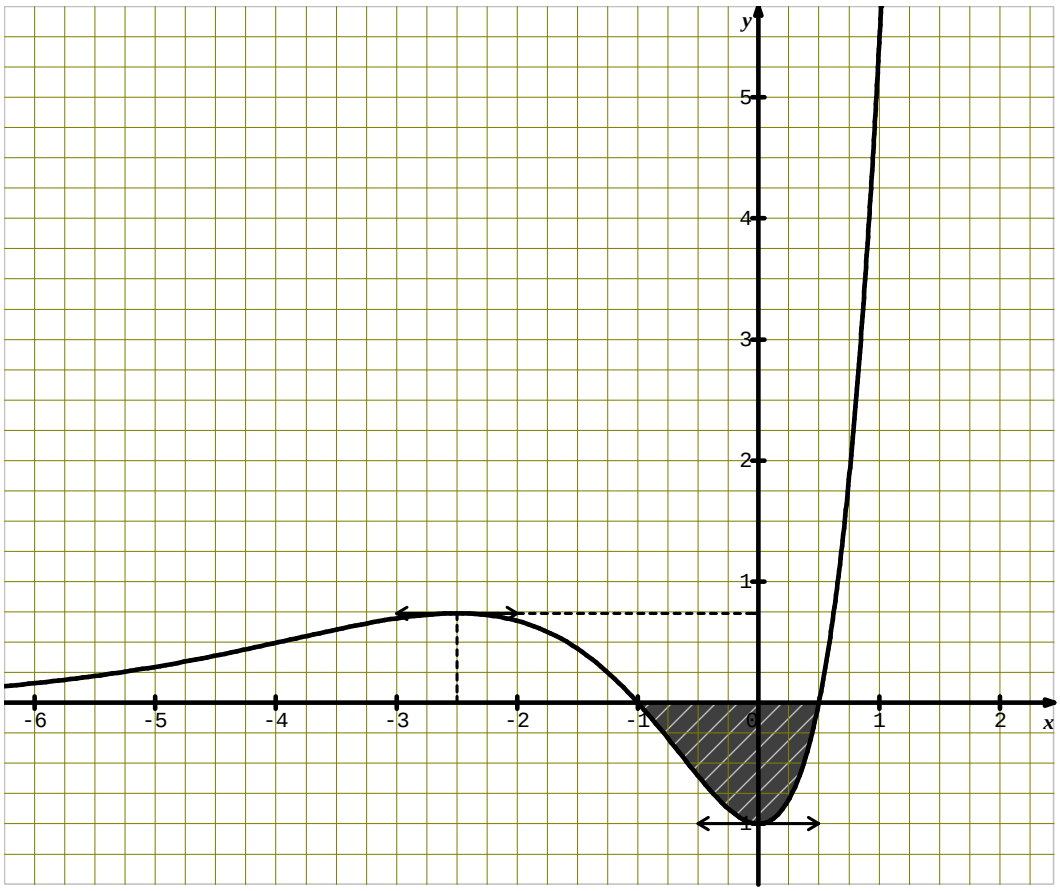
Partie C

$F(x)=(2x^2-3x+2)e^x$: $F'(x)=(4x-3)e^x+(2x^2-3x+2)e^x=(2x^2+4x-3x+2-3)e^x=(2x^2+x-1)e^x$

On déduit que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

La courbe C est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-1;1/2]$, donc $f(x)\le0$ sur cet intervalle et on a : $A=-\left(\int_{-1}^{1/2}f(x)\right)u.a=\left(-\left[F(x)\right]_{-1}^{1/2}\right)\times4=4\left(F(-1)-F(1/2)\right)$

$F(-1)=(2+3+2)e^{-1}=\dfrac{7}{e}$ et $F(1/2)=(2\times(1/2)^2-3/2+2)e^{1/2}=(1/2-3/2+2)\sqrt{e}=\sqrt{e}$

$A=4\left(\dfrac{7}{e}-\sqrt{e}\right)cm^2\approx3,706cm^2$

Fomesoutra.com
ça soutra !