DS N°5 MATHEMATIQUES TERM STL PH 2009-*2010*

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ direct .l'unité graphique est égale à 4 cm.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2\sqrt{3}\,z+4=0$

   b. On désigne par z_1 et z_2 les solutions , z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative .

   Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. Soit A le point du plan d'affixe z_1 et B celui d'affixe z_2 .

   Placer les point A et B dans le plan complexe et démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

3. Soit E le point d'affixe $z_3=e^{-i\pi/3}$ et F d'affixe $z_4=e^{i\pi/6}$.

   a. F est l'image de E par une transformation du plan .
   Donner la nature de cette transformation et ses éléments caractéristiques.

   b. Montrer que F est le milieu du segment [OB].

4. Soit D l'image de E par la translation de vecteur $2\vec{v}$.

   a. Placer les points D , E et F sur la figure .

   b. Déterminer l'affixe de D .

   c. Montrer que $OD=DB$.

   d. Qu'en déduire pour la droite $\left(AD\right)$, dans cette question , toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte de l'évaluation.

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x-5+5\ln x$

On note g ' la fonction dérivée de la fonction g .

1. Calculer $g'(x)$ pour x dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Etudier le signe de $g'(x)$ et donner le sens de variation de la fonction g (l'étude des limites n'est pas demandée).

2.a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1;5]$.

   On note α cette solution .

   b. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α .

3. Etudier le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x-5)\ln x}{x}$.

On peut donc aussi écrire : $f(x)=\dfrac{1}{x}(x-5)\ln x$ ou encore $f(x)=\ln x-\dfrac{5\ln x}{x}$.

1. a . Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat .

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2.a. Soit f 'la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$.

   b. Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

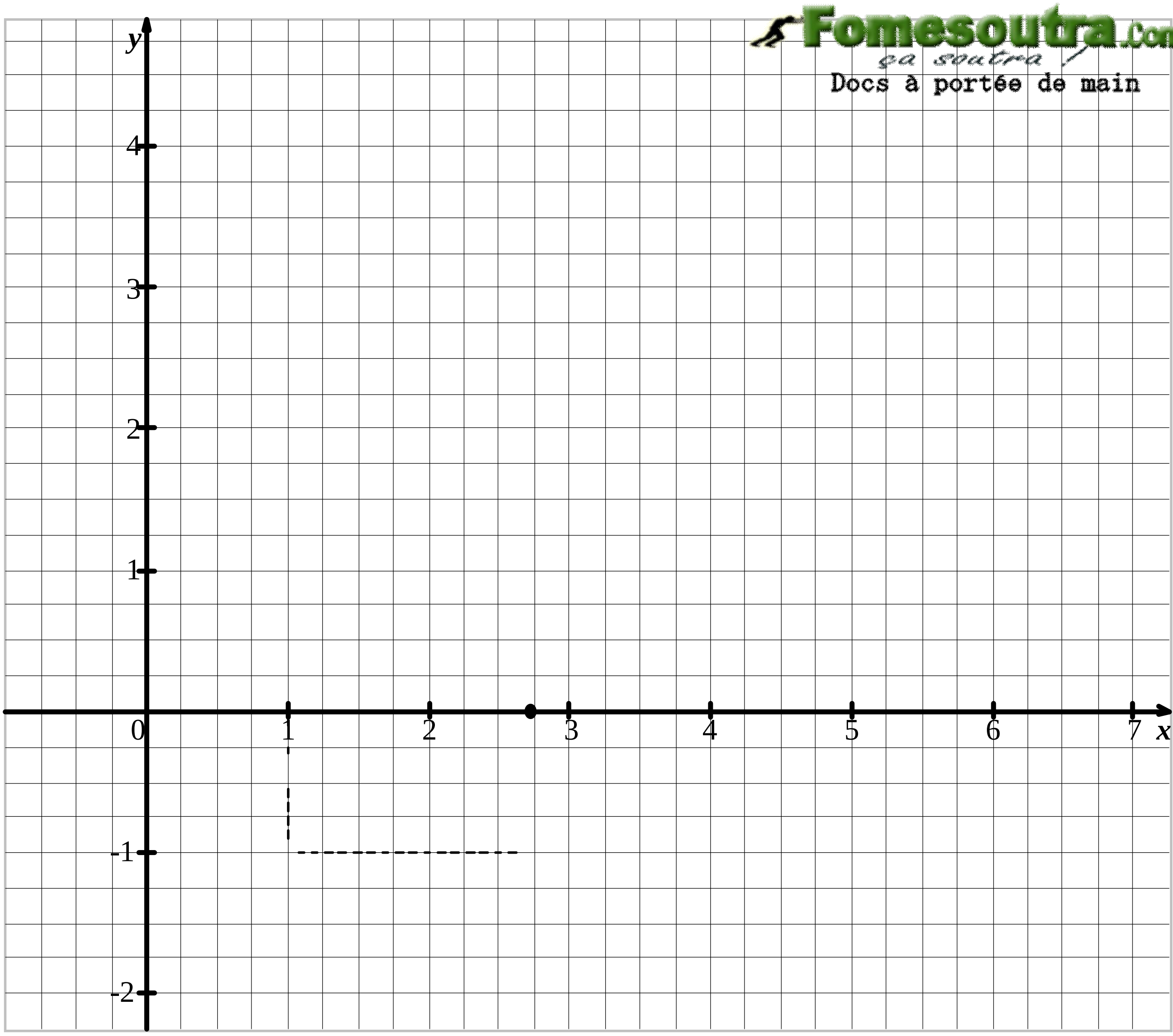
3. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm .

a. Soit A le point de la courbe d'abscisse 1 .
Donner une équation de la droite D tangente en A à la courbe C .
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et de l'axe des ordonnées.
b. Tracer la droite D et la courbe C

Partie C

1. Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x - \frac{5}{2}(\ln x)^2$.
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f .

2. a . Hachurer l'aire du domaine plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
b. Déterminer graphiquement une valeur approchée au cm² de l'aire du domaine .
c. Calculer la valeur exacte ,en cm² de $A = -4\left[F(e) - F(1)\right]$.



SOLUTION

Exercice 1

1. a. $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 4 = 12 - 16 = -4 = \left(2i\right)^2 < 0$

Donc $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3}-2i}{2} = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3} + i$

On constate que $z_2 = \overline{z_1}$.

b. $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i \quad z_1 = a + bi$ donc $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

Soit $\theta_1 = \arg z_1 : \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{a}{|z_1|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{a}{|z_1|} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$, donc $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in Z$.

On sait que $z_2 = \overline{z_1}$, donc ils ont le même module et $\arg z_2 = -\arg z_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in Z$.

$z_1 = \left[2; -\dfrac{\pi}{6}\right]$ et $z_2 = \left[2; \dfrac{\pi}{6}\right]$ d'où $z_1 = 2e^{-i\pi/6}$ et $z_2 = 2e^{i\pi/6}$.

2.

$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = \sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i = 2i$, donc $\left|z_{\overline{AB}}\right| = |2i| = 2$, comme $|z_1| = |z_2| = \left|z_{\overline{AB}}\right| = 2$, le triangle OAB est un triangle équilatéral.

3. a. $\dfrac{z_4}{z_3} = \dfrac{e^{i\pi/6}}{e^{-i\pi/3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $z_4 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times z_3$ par conséquent F est l'image de E par la rotation

De centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Soit M le milieu de [OB] , donc on a : $z_M = \dfrac{z_O + z_B}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, donc $z_M = z_4$ et par conséquent les points M et F sont confondus et F est le milieu de [OB].

4.a. D est l'image du point E par la translation de vecteur $2\vec{v}$ signifie que $\overrightarrow{ED} = 2\vec{v}$

Donc $z_D - z_E = 2i \Leftrightarrow z_D = 2i + z_E = 2i + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Donc $z_D = \dfrac{1}{2} + \left(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

b. $OD = |z_D| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 4 - 2\sqrt{3} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

c. $z_{\overline{DB}} = z_B - z_D = \sqrt{3} + i - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - 2i = \left(\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i$

$$DB = \left|z_{\overline{DB}}\right| = |z_B - z_D| = \sqrt{\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{3 + \frac{1}{4} - \sqrt{3} + \frac{3}{4} - \sqrt{3} + 1} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

On déduit que $OD = DB = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

d. On sait que le triangle OAB est équilatéral donc AO=AB

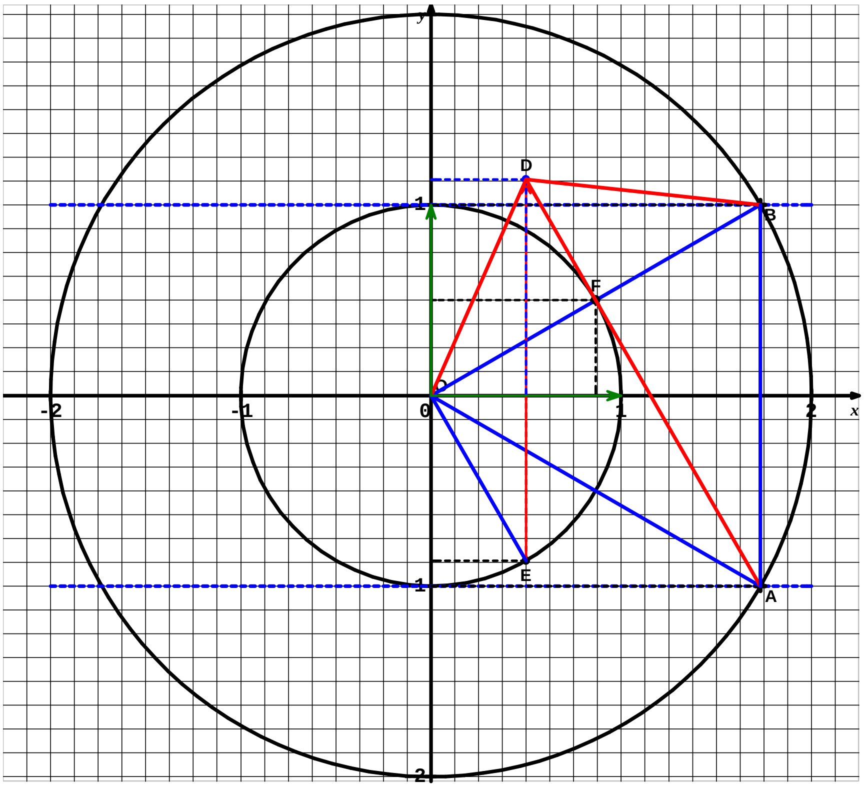
on déduit que A appartient à la médiatrice du segment [OB] et on sait que $OD = DB = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.

On déduit que D appartient à la médiatrice de [OB]

Ce qui démontre que la droite (AD) est la médiatrice du segment [OB].
On peut aussi démontrer que les droites (AD) et (OB) sont perpendiculaires par la méthode du produit scalaire .

$$z_{\overrightarrow{DA}} = z_A - z_D = \sqrt{3} - i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 2i = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right)i$$; donc $\overrightarrow{DA}\left(\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right)\right)$

$\overrightarrow{OB}\left(\sqrt{3};1\right)$, d'où $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{OB} = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) \times \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) \times 1 = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 = 0$. cqfd.



Problème

Partie A

1. g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $g'(x) = 1 + \frac{5}{x} = \frac{x+5}{x}$. $x+5>0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ .donc $g'(x)>0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et par conséquent la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2.a . la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ .elle est strictement croissante sur $[1;5] \subset]0;+\infty[$ et on a : $g(1) = 1-5+5\ln 1 = -4 < 0$ et $g(5) = 5-5+5\ln 5 = 5\ln 5 > 0$
$0 \in [g(1);g(5)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires on déduit que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha)=0$ et $\alpha \in [1;5]$.

b. à l'aide de la calculatrice on lit : $g(1{,}87) = -0{,}0003 < 0$ et $g(1{,}88) = 0{,}036 > 0$, donc $1{,}87 \le \alpha \le 188$.

3. signe de $g(x)$

x	0 α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

Partie B

1.a. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x-5) = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$, donc par produit des limites on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$.

On déduit que la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5\ln x}{x} = 0$ par différence des limites on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a . f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 5\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = \frac{x-5+\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b. pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a : $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe $g(x)$

x	0			α		$+\infty$
$f'(x)$	||		$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3.a. Soit A le point de la courbe C d'abscisse 1

Equation de la tangente en A à la courbe C est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = \frac{g(1)}{1^2} = g(1) = 1 - 5 + 5\ln 1 = -4$ et $f(1) = \frac{(1-5)\ln 1}{1} = 0$

D : $y = -4(x-1) + 0 = -4x + 4$.

Coordonnées du point d'intersection de D et de l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée à l'origine

On pose $x = 0$ donc $y = 4$ et on a : $(0;4)$.

b. graphique

Partie C

1. $F(x) = x\ln x - x - \frac{5}{2}(\ln x)^2$. F est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a : $\left(u^2\right)' = 2u'u$, donc

$$F'(x) = 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} - 1 - \frac{5}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\ln x = \ln x + 1 - 1 - 5\frac{\ln x}{x} = \ln x - -5\frac{\ln x}{x} = f(x)$$

Donc la fonction F est bien une primitive de la fonction f.

2.a . voir figure

b. Soit E le point de coordonnées (e ; 0) et F celui de coordonnées (e ; -1) et G (1 ;-1)

l'aire du rectangle AEFG vaut en unité d'aire : $A = L\times l = (e-1)\times 1 = (e-1)u.a$

or l'unité d'aire vaut $u.a = 2\times 2 = 4cm^2$, donc l'aire du rectangle AEFG est égale

$A = 4(e-1) \approx 6{,}8cm^2$.

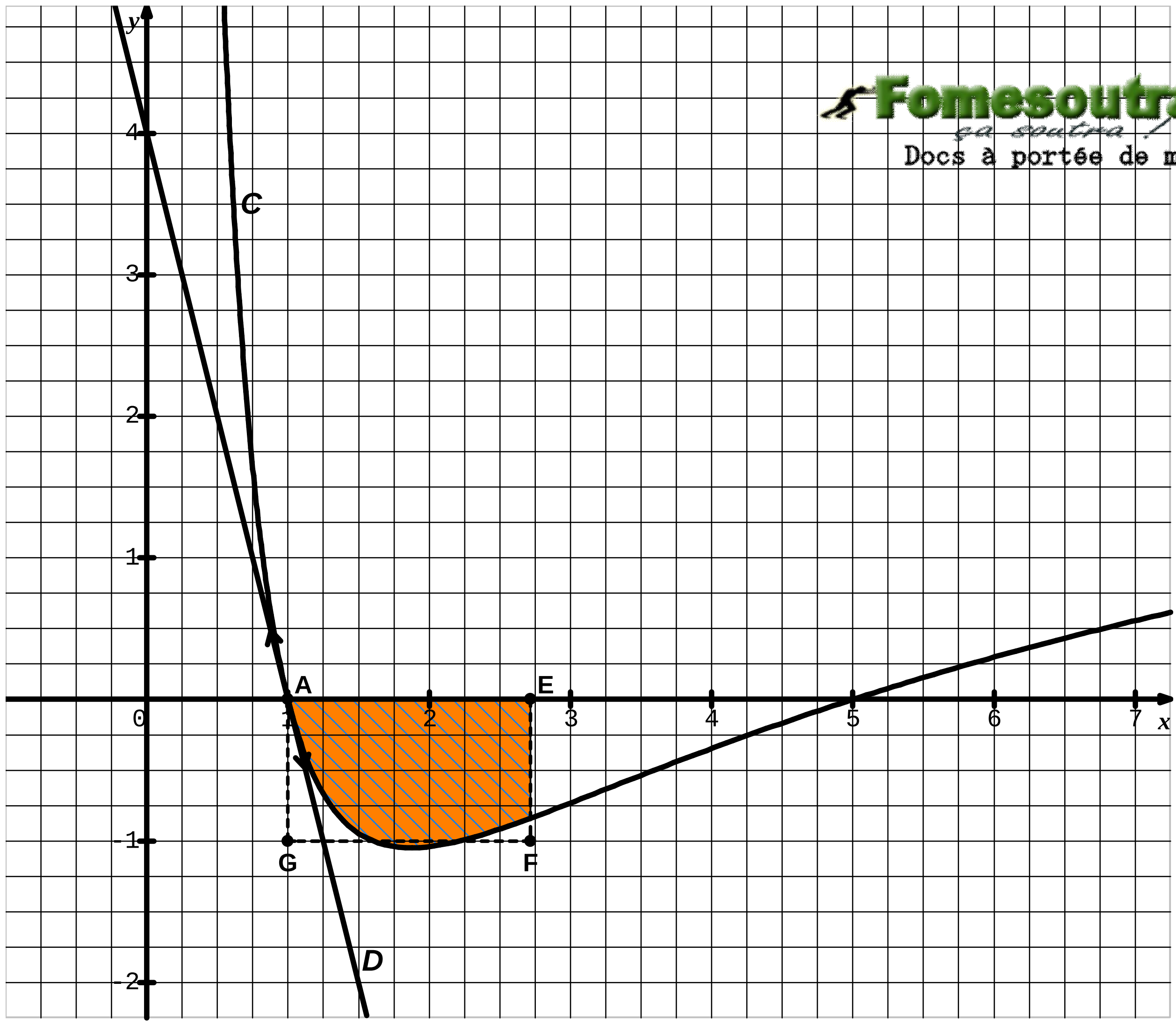
c.

La courbe C est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1;e]$

Donc $A = \left(-\int_1^e f(x)dx\right)u.a = 4\left(-\int_1^e f(x)dx\right) = -4\left[F(e) - F(1)\right]cm^2$.

$F(e) = e\ln e - e - \frac{5}{2}(\ln e)^2 = e - e - 2{,}5 = -2{,}5$ et $F(1) = 1\times\ln 1 - 1 - \frac{5}{2}(\ln 1)^2 = 0 - 1 - 0 = -1$

Donc $A = -4\left[F(e) - F(1)\right] = -4(-2{,}5 + 1) = -4\times(-1{,}5) = 6cm^2$



y
4
3
2
1
-1
-2
C
A
E
G
F
D
0
1
2
3
4
5
6
7
x