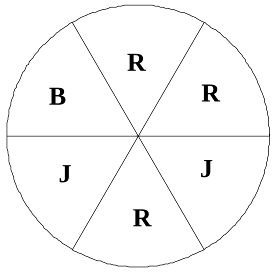
Devoir Surveillé n°9 de Mathématiques Terminale D

Exercice 1

Partie A

Une roue de loterie comporte 3 secteurs, portant respectivement les numéros 1, 2 et 3. Quand on fait tourner la roue, un repère indique le numéro sortant. La probabilité de sortie du numéro 2 est double de la probabilité de sortie du numéro 1, et la probabilité de sortie du numéro 3 est triple de celle du numéro 1. Calculer les probabilités de sortie respectives des 3 numéros.

Partie B



La roue est maintenant divisée en 6 secteurs égaux ayant chacun la même probabilité de s'arrêter devant le repère.

- 2 secteurs sont jaunes (marqués J sur la figure ci-contre)
- 3 secteurs sont rouges (marqués R sur la figure ci-contre)
- 1 secteur est bleu (marqué B sur la figure ci-contre)

La règle du jeu est la suivante : pour participer au jeu, le joueur doit miser une certaine somme et si le jaune sort, il gagne 20 €, si le bleu sort, il gagne 30 €, si le rouge sort, il ne gagne rien.

1. Dans cette question, on suppose que la mise est de 10 €. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque arrêt de la roue associe le gain effectif (positif ou négatif) du joueur. (Par exemple, si le bleu sort, le gain effectif pour le joueur est de 20 €.)

1.a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

1.b. Calculer son espérance mathématique.

2. L'organisateur du jeu ne souhaite pas que l'espérance de gain du joueur soit positive. à quelle valeur minimale, exprimée par un nombre entier d'euros, doit-il fixer le montant de la mise ?

Exercice 2

Une urne opaque contient 5 boules indiscernables au toucher : deux boules sont rouges , on les désignera par R_1 et R_2 ; deux boules sont vertes , on les désignera par V_1 et V_2 ; la dernière boule est blanche et porte le nombre 3, on la désignera par B.

On tire simultanément trois boules; un tirage est noté sous la forme $\{R_1 ; V_1 ; V_2\}$(par exemple).

1. Écrire la liste des tirages possibles.
   (On pourra raisonner en distinguant les tirages suivant le nombre de boules rouges qu'ils contiennent.)
2. Les tirages étant équiprobables, quelles sont les probabilités respectives p_1 p_2 et p_3 pour que lors d'un tirage :
   a) deux boules tirées soient rouges ;
   b) les trois boules tirées soient de couleurs différentes ;
   c) la boule blanche ait été tirée.
3. On note X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la somme des nombres inscrits sur les boules tirées.
   a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b) Présenter en tableau la loi de probabilités de X.
   c) Déterminer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I =] 0; $+\infty$ [par : $g(x) = \ln x - 1 - \dfrac{9}{2}x^2$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1°) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$. Etudier son signe sur] 0 ; $+\infty$ [.

2°) Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).

3°) En déduire pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ le signe de $g(x)$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur] 0 ; $+\infty$[par : $f(x) = -9x + 5 - \dfrac{2\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unités graphiques : 10 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1°) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

3°) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).

4°)soit (Δ) la droite d'équation $y = -9x + 5$. On considère la fonction h définie sur]0 ; +∞[par $h(x) = f(x) - (-9x+5)$.

a. Démontrer que (Δ)est asymptote à la courbe C.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ

c. Etudier la position relative de C et Δ sur]0 ; +∞[

5°) *a*. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f

b. Vérifier que pour tout x de]0 ; +∞[: $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

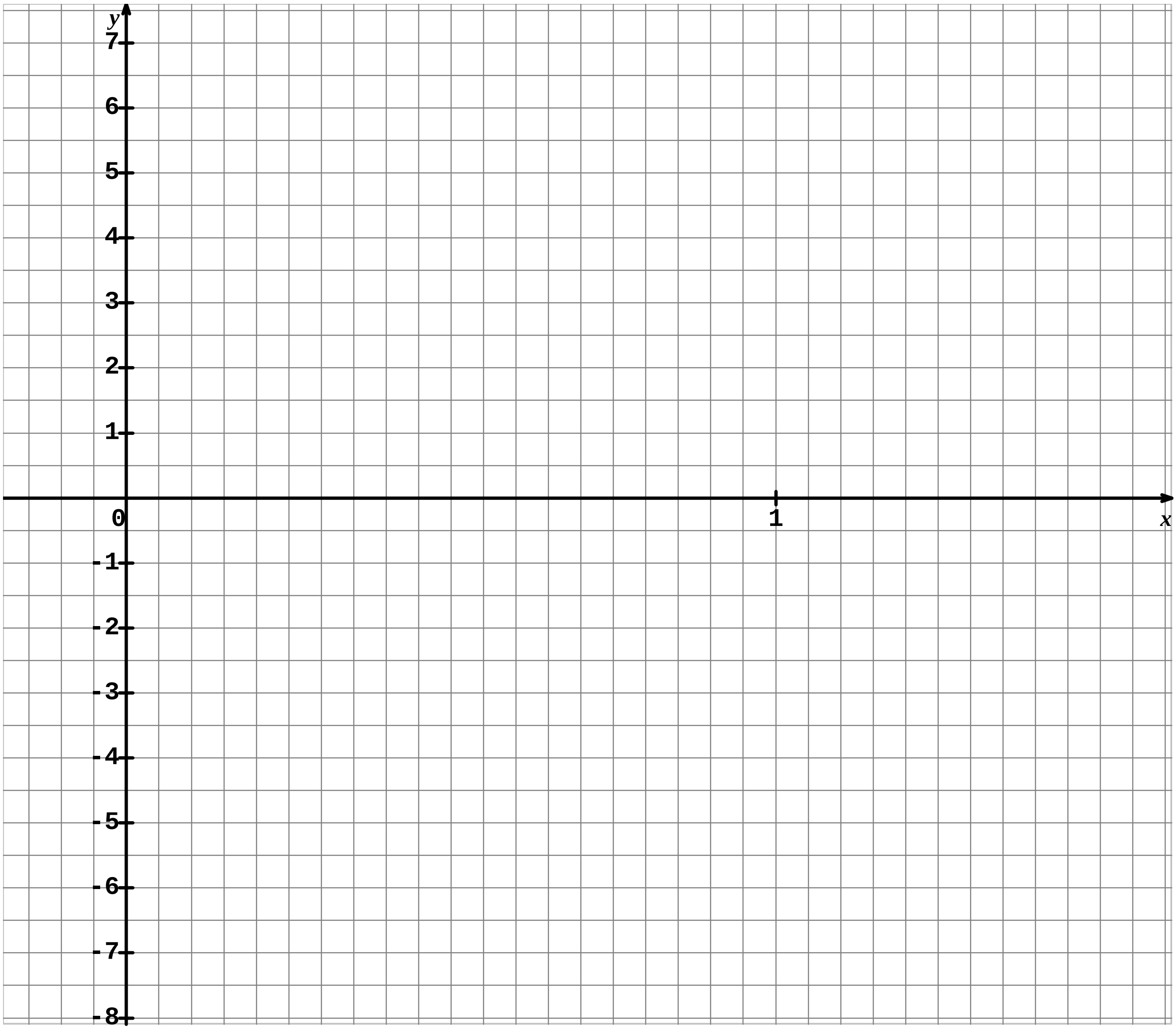
c. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur]0 ; +∞[.

6°) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.

7°) Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

8°) Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $[1/2;1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}



Correction

Exercice 1

Partie A

Soient: p_1 la probabilité de sortie du numéro 1 ; p_2 la probabilité de sortie du numéro 2

p_3 la probabilité de sortie du numéro 3

On a $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ avec $p_2 = 2p_1$ et $p_3 = 3p_1$.

On en déduit que : $p_1 + 2p_1 + 3p_1 = 1 \Rightarrow 6p_1 = 1 \Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{6}$ d'où $p_1 = \frac{1}{6}$.

Donc les probabilités de sortie des 3 numéros sont $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ et $p_3 = \frac{1}{2}$

Partie B

1)a) les valeurs prises par X sont -10€, 10€ et 20€.

$p(X = -10) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$p(X = 10) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\qquad p(X = 20) = \frac{1}{6}$

$X = x_i$	-10	10	20	somme
$p(X = x_i)$	1/2	1/3	1/6	1

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X peut être résumée dans le tableau suivant:

b) Son espérance mathématique $E(X) = \sum_i x_i p(X = x_i)$. soit $E(X) = -10 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{3} + 20 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$.

2) soit x le montant de la mise

$$E(X) = -x \times \frac{1}{2} + (20 - x) \times \frac{1}{3} + (30 - x) \times \frac{1}{6} = -\frac{x}{2} + \frac{20}{3} - \frac{x}{3} + \frac{30}{6} - \frac{x}{6} = -x + \frac{35}{3}.$$

$E(X) \leq 0$ ***ssi*** $-x + \frac{35}{3} \leq 0$ ***ssi*** $x \geq \frac{35}{3}$. Donc la valeur minimale que l'organisateur doit fixer pour le montant de la mise afin que l'espérance de gain du joueur soit négative est de 12€.

Solution Exercice 2

1.Pour déterminer tous *les tirages possibles.* on va *distinguer les tirages* suivant le nombre de boules rouges qu'ils contiennent.

- Tirages avec 2 boules rouges: il suffit de choisir une boule parmi les 3 boules restantes.
  Il y en a donc trois : $\{R_1, R_2, V_1\}$; $\{R_1, R_2, V_2\}$; $\{R_1, R_2, B\}$.
- Tirages avec une boule rouge seulement: il faut adjoindre à la boule rouge choisie 2 boules prises parmi les 3 boules restantes.
  Avec R_1 on trouve: $\{R_1, V_1, V_2\}$; $\{R_1, V_1, B\}$; $\{R_1, V_2, B\}$
  Avec R2, on trouve: $\{R_2, V_1, V_2\}$; $\{R_2, V_1, B\}$; $\{R_2, V_2, B\}$.
- Tirages avec aucune boule rouge: il n'y en a qu'un seul, puisqu'il faut tirer les 3 boules restantes: $\{V_1, V_2, B\}$. On peut ainsi écrire la liste des tirages possibles (il y en a dix) :
  $\{R_1, R_2, V_1\}$; $\{R_1, R_2, V_2\}$; $\{R_1, R_2, B\}$. $\{R_1, V_1, V_2\}$; $\{R_1, V_1, B\}$; $\{R_1, V_2, B\}$
  $\{R_2, V_1, V_2\}$; $\{R_2, V_1, B\}$; $\{R_2, V_2, B\}$. $\{V_1, V_2, B\}$

2. a) Soit A l'événement: "deux boules tirées sont rouges". A est formé de 3 éléments: $\{R_1, R_2, V_1\}$, $\{R_1, R_2, V_2\}$ et $\{R_1, R_2, B\}$. Il y a 10 cas possibles en tout d'après le 1. Comme on fait l'hypothèse que les tirages sont équiprobables $p(A) = \frac{3}{10}$ soit <u>P_1 =0,3</u>

b) Soit B l'événement: "les trois boules tirées sont de couleurs différentes". B est formé de 4 éléments :

$\{R_1, V_1, B\}$, $\{R_1, V_2, B\}$, $\{R_2, V_1, B\}$, $\{R_2, V_2, B\}$. D'où: $p(B) = \frac{4}{10}$ <u>soit P_2 = 0,4</u>

c) Soit C l'événement: "la boule blanche a été tirée". C est formé de 6 éléments : {R_1 , R_2, B}, {R_1, V_1, B}, {R_1, V_2, B}, {R_2, V_1 , B}, {R_2, V_2, B} et {V_1,V_2,B}. D'où: $p(C)=\dfrac{6}{10}$, soit P_3=0,6

3. a) Pour chacun des 10 tirages, calculons la somme des nombres inscrits sur chaque boule tirée, sachant qu'il y a **1** sur R_1 et R_2 ; **2** sur V_1 et V_2 et **3** sur B.

Pour {R_1 , R_2, V_1}: X = 1+1+2 = 4.
Pour {R_1 , R_2 , V_2}: X = 1+1+2 = 4.
Pour {R_1, R_2 , B}: X = 1+1+3 = 5.
Pour { R_1 , V_1 , V_2}: X = 1+2+2 = 5.
Pour {R_1 , V_1 , B }: X = 1+2+3 = 6.
Pour {R_1 ,V_2 , B}: X = 1+2+3 = 6.
Pour {R_2 , V_1 , V_2} : X = 1 + 2 + 2 = 5.
Pour {R_2 , V_1 , B} : X = 1 + 2 + 3 = 6. Pour {R_2 , V_2 , B} : X = 1 +2 +3 = 6.
Pour {V_1, V_2, B} : X = 2 +2 + 3 = 7.

L'ensemble des valeurs prises par X est $X=\{4;5;6;7\}$

b) p(X = 4)= p ({R_1 ,R_2,V_1}) + p({R_1,R_2,V_2})= $\dfrac{2}{10}$= 0,2

p(X = 5) = P({R_1, R_2, B1) + P({R_1, V_1 , V_2}) + P({R_2 ,V_1 , V_2})=$\dfrac{3}{10}$= 0,3

p(X=6) =P({R_1, V_1, B}) + p({R_1, V_2 , B_1) + P({R_2 ,V_1 , B}) +P({R_2,V_2 ,B})= $\dfrac{4}{10}$=0,4.

p(X = 7)= p ({V_1,V_2,B}) = $\dfrac{1}{10}$= 0,1

k	4	5	6	7
$p(X=k)$	0,2	0,3	0,4	0,1

On a ainsi déterminé la loi de probabilité de X :
On vérifie que la somme des probabilités p(X = k) est 1.

c) L'espérance mathématique de X est égale à : $\sum_{i=4}^{7} k\ p(X=k)$

E(X) = (4 × 0,2) + (5 × 0,3) + (6 ×0,4) + (7 × 0,1) E (X) = 5,4

Partie A

soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln x-1-\dfrac{9}{2}x^2$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}-9x=\dfrac{1-9x^2}{x}=\dfrac{(1-3x)(1+3x)}{x}$. Or x >0 donc $g'(x)=0$

Si et seulement si, $1-3x=0$ ou $1+3x=0$ c'est-à-dire $x=\dfrac{1}{3}$ ou $x=-\dfrac{1}{3}$, mais $-\dfrac{1}{3}\notin]0;+\infty[$

Donc $g'(x)>0$ sur $\left]0;\dfrac{1}{3}\right[$ et $g'(x)<0$ sur $\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

x	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	$-\ln 3-\frac{3}{2}$	↘

3- la fonction g admet un maximum sur $]0;+\infty[$, égal à $-\ln 3-\dfrac{3}{2}<0$, donc pour tout réel appartenant à $]0;+\infty[$, $g(x)$ est strictement négatif.

Partie B

soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=-9x+5-2\dfrac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to0^+}-9x+5=5$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}-2\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

La droite D d'équation x = 0 est asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-9x+5=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=-9-2\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=-9-\dfrac{2-2\ln x}{x^2}=\dfrac{-9x^2-2+2\ln x}{x^2}=\dfrac{2g(x)}{x^2}$.

Or $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est strictement négatif sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variations

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

2/a)soit D la droite d'équation $y = -9x + 5$. On considère la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - (-9x+5)$.pour tout $x \in]0;+\infty[$;

$h(x) = -9x + 5 - 2\dfrac{\ln x}{x} - (-9x+5) = -2\dfrac{\ln x}{x}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.la droite D est donc asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b) pour le point d'intersection de C et D , on a $h(x) = 0$, c'est-à-dire $\ln x = 0$, soit $x = 1$, les coordonnées de ce point sont $(1;-4)$.

c) si x = 1 , on vient de voir que C et D se coupent ;

si $x > 1$ on a : $\ln x > 0$ et donc $h(x) < 0$, d'où la courbe C est en dessous de la droite D

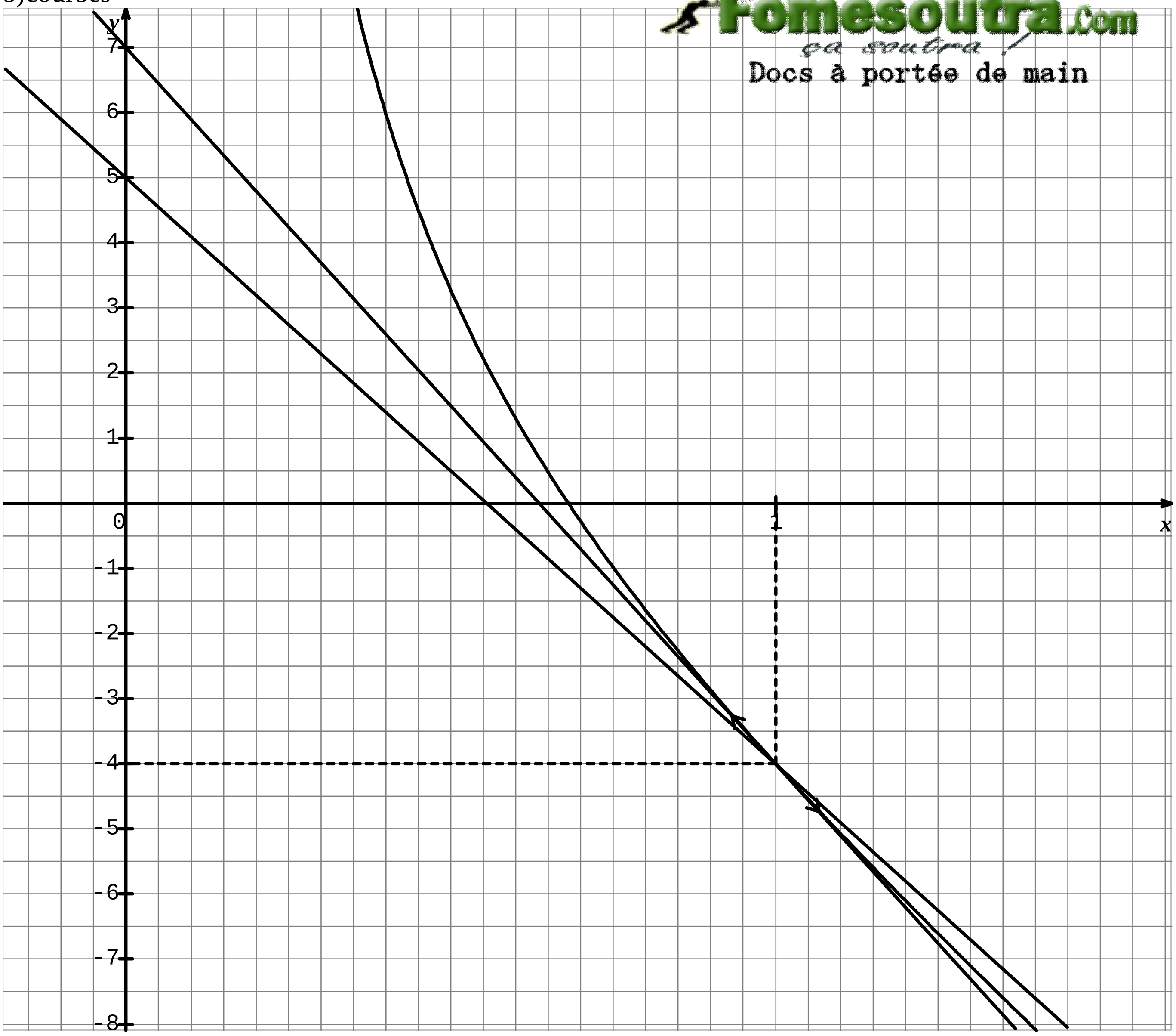
si $0 < x < 1$, on a : $\ln x < 0$ et donc $h(x) > 0$, d'où la courbe C est au dessus de la droite D.

3°-

Tangente T à la courbe C au point A d'abscisse 1

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$; $f'(1) = -11$ et $f(1) = -4$, donc $y = -11(x-1) - 4$, soit $y = -11x + 7$

b)courbes



4) la fonction f est dérivable est strictement décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$, donc en particulier sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, de plus $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+4\ln 2>0$ et $f(1)=-4<0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe un seul réel α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ tel que $f(\alpha)=0$.

Encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.on a $f(0,6)>0$ et $f(0,7)<0$, donc $0,6<\alpha<0,7$
Puis $f(0,68)>0$ et $f(0,69)<0$ donc $0,68<\alpha<0,69$.

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I =] 0; +∞ [par : $g(x)=\ln x-1-\frac{9}{2}x^2$

(où ln désigne le logarithme népérien).

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\left]0\,;+\infty\right[$. Etudier son signe sur] 0; +∞ [.
2. Etudier le sens de variation de la fonction g (on ne demande pas les limites en 0 et en +∞).
3. En déduire pour tout $x\in\left]0\,;+\infty\right[$ le signe de $g(x)$.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur] 0 ; +∞[par : $f(x)=-9x+5-\frac{2\ln x}{x}$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ d'unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Etudier la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$).

4.soit (Δ) la droite d'équation $y=-9x+5$. On considère la fonction h définie sur]0 ; +∞[par $h(x)=f(x)-(-9x+5)$.
   a. Démontrer que (Δ)est asymptote à la courbe C.
   b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ
   c. Etudier la position relative de C et Δ sur]0 ; +∞[

5. *a*. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\left]0\,;+\infty\right[$. f' est la fonction dérivée de la fonction f
   b. Vérifier que pour tout x de]0 ; +∞[: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x^2}$.
   c. Déduire de la partie A le sens de variation de f sur]0 ; +∞[.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C au point A d'abscisse 1.
7. Tracer C , (T) et les asymptotes à la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
8. Démontrer qu'il existe un seul réel α de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ tel que $f(\alpha)=0$.

   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Partie C :

Soit h la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par $h(x)=(\ln x)^2$

1.On désigne par h' la fonction dérivée de la fonction h.
   Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle] 0 ; +∞ [.
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle] 0 ; +∞ [.
3. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et le droites (d_1) et (d_2) d'équations : $(d_1): x=1$ *et* $(d_2): x=e$.
4. Calculer le nombre $A=-5\times[F(e)-F(1)]$. Donner la valeur exacte .