LA PEROUSE
Collège crée par un collectif d'enseignants de l'Université et des Lycées

BP 1484 Abidjan 22
☎ 22496049-07056738-03718818

ANNEE SCOLAIRE 2021-2022	DEVOIR DE MATHEMATIQUES	NIVEAU : Tle D
		DUREE : 3H30
C.E. MATHEMATIQUES		DATE : 11/10/2021

Ce devoir comporte trois pages numérotées : $^1/_3$; $^2/_3$ et $^3/_3$.

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de « vrai » si l'affirmation est vraie ou « faux » si l'affirmation est fausse :

N°	AFFIRMATIONS
1	Si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + 2x - 1] = 0$, alors la droite d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.
2	Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[2 ; 5]$ alors $f([2 ; 5]) = [f(2); f(5)]$.
3	Si une fonction f admet une limite finie en un point a, alors f est continue en a.
4	Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle fermé $[a ; b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle ouvert $]a ; b[$.

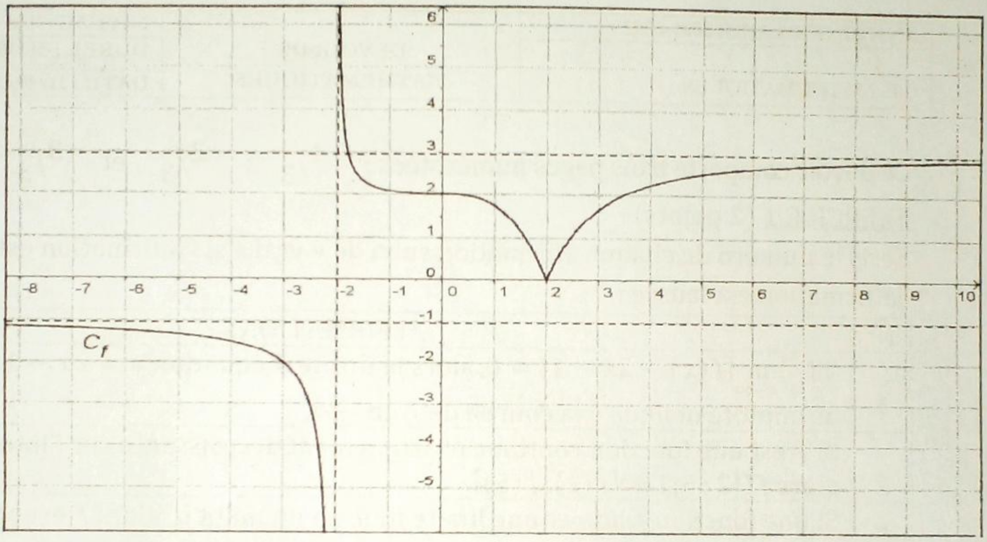
EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque proposition, quatre réponses sont données et une seule d'entre elles est exacte. Ecris le numéro de la proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse :

N°	PROPOSITIONS	REPONSE A	REPONSE B	REPONSE C	REPONSE D
1	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ est égale à	1	$+\infty$	0	$-\infty$
2	L'ensemble de définition de la fonction : $x \longmapsto \frac{2x^2-1}{1-\lvert x\rvert}$ est	$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$
3	Si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x + 2] = 0$ alors (C_f) admet en $-\infty$ une asymptote d'équation	$y = x - 2$	$y = -x + 2$	$y = -x - 2$	$y = x + 1$
4	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{2 - 3x}{x - 1}$ est égale à	-3	$+\infty$	-2	$-\infty$

EXERCICE 3 (3 points)

La courbe ci-dessous représente une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.



1. Précise l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. a) Détermine $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x)$.

   b) Donne une interprétation graphique de ces résultats.
3. a) Détermine la limite de f en $-\infty$ et interprète graphiquement le résultat.

   b) Détermine la limite de f en $+\infty$ et interprète graphiquement le résultat.
4. Quelles sont les images par f des intervalles $]-\infty\ ;\ -2[$ et $[2\ ;\ +\infty[$?

EXERCICE 4 (3 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \text{si } x < 2 \\ g(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}, \text{si } x > 2 \end{cases}$.

1. Calcule la limite de g à gauche en 2.
2. Calcule la limite de g à droite en 2.
3. La fonction g admet-elle une limite en 2 ?
4. a) Justifie que la fonction g admet en 2 un prolongement par continuité noté h.

   b) Définis la fonction h.

EXERCICE 5 (5 points)

On a dressé le tableau de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

1. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

   b) Justifie que : $1,6 < \alpha < 1,7$.

2. Démontre que : $\forall x \in]-\infty\,;\ \alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha\,;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm.

3. a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interprète graphiquement ces résultats.

   b) Justifie que $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$. Interprète graphiquement les résultats.

4. a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$.

   b) Dresse le tableau de variation de f.

   c) Soit φ la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,;\ -1[$.

   Démontre que φ est une bijection de $]-\infty\,;\ -1[$ sur un intervalle K à déterminer.

5. Trace dans le repère (O, I, J) la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de φ^{-1}, la bijection réciproque de φ.

(On prendra : $\alpha \approx 1,6$ et $f(\alpha) \approx -0,1$).

EXERCICE 6 (5 points)

Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un produit. Ce laboratoire peut produire de 5 à 30 kg de ce produit par semaine. Un étude a montré que le bénéfice réalisé par ce laboratoire, exprimé en milliers de F CFA, pour la production et la vente de x kg de produit est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[5; 30]$ par :

$$B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 11x^2 - 40x - 72.$$

En t'appuyant sur tes acquis de la classe de Terminale, détermine la quantité de produit que ce laboratoire doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice maximal par semaine. Donne une estimation du bénéfice maximal réalisé. On arrondira le résultat à l'unité près.