

Exercice 4

On s'intéresse au mouvement d'un mobile qui se déplace sur un axe horizontal en étant fixé à un ressort.

L'axe est muni d'un repère $(O; \vec{i})$ l'unité étant le cm. G désigne le centre d'inertie. À l'équilibre G et O sont confondus.

On tire de 5 cm vers la droite le mobile et on lâche.

On appelle $f(t)$ la position du mobile sur l'axe à l'instant t exprimé en secondes. Ainsi $f(0) = 5$.

On rappelle que la vitesse du mobile à l'instant t est $f'(t)$ (donc $f'(0) = 0$).

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On suppose, dans cette question uniquement, qu'il n'y a pas de frottements sur l'axe.

On admettra dans ce cas, que la fonction f vérifie l'équation différentielle suivante : $(E): y'' + 2y = 0$.

a. Résoudre l'équation différentielle (E) .

b. Déterminer la solution de (E) vérifiant $f(0) = 5$ et $f'(0) = 0$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il y a des frottements sur l'axe.

On admet dans ce cas que pour $t \geq 0$, on a : $f(t) = 5\sqrt{2}e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

a. Démontrer que pour tout $t > 0$, on a : $-5\sqrt{2}e^{-t} \leq f(t) \leq 5\sqrt{2}e^{-t}$.

b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Quel est le comportement du mobile pour t assez grand ?

