EXERCICE 1 (4 points)

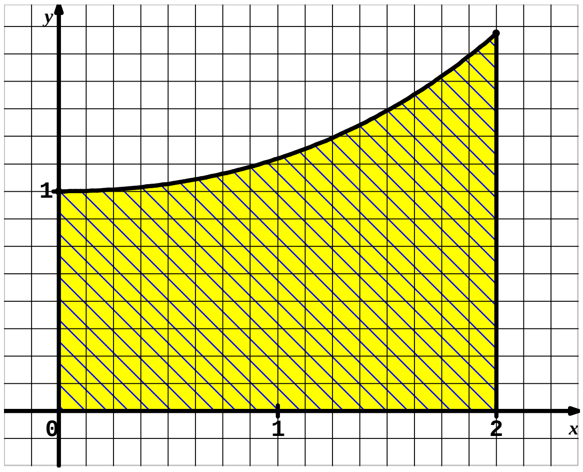
On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$, où y est une fonction inconnue de la variable x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - \frac{1}{2}y = 0$.

2. On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = e^{x/2} - \frac{1}{2}x$

   Vérifier que f est solution de l'équation (E)

3. On a dessiné ci-contre la courbe C_f représentative de la fonction f, précédemment définie, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2.



On note K le solide engendré par la rotation de la courbe C_f autour de l'axe des abscisses.

a. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xe^{x/2}$, et H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = 2e^{x/2}(x-2)$.

   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur exacte du volume V du solide K, exprimée en unités de volume.

   (On rappelle que $V = \pi\int_0^2 [f(x)]^2 dx$).