Corrigé

EXERCICE 3

1. $y''+9y=0$. . On sait que la solution générale est de la forme : $f(t)=A\cos(3t)+B\sin(3t)$ avec A,B et t réels.

2. $y''+9y=8\sin t$.

a. $f(t)=-\frac{1}{3}\sin(3t)+A\cos(3t)+\sin t$. $f'(t)=-\cos(3t)-3A\sin(3t)+\cos t$.

$f''(t)=3\sin(3t)-9A\cos(3t)-\sin t$

Vérification : $y''+9y=8\sin t \Leftrightarrow 3\sin(3t)-9A\cos(3t)-\sin t+9\left(-\frac{1}{3}\sin(3t)+A\cos(3t)+\sin t\right)=8\sin t$

La fonction *f* est donc une solution de l'équation (E).

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+A\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

b. $\Leftrightarrow \frac{-\sqrt{2}}{6}+\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)A+\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{3}-A+1\right)=0$ et $f(t)=-\frac{1}{3}\sin(3t)+\frac{2}{3}\cos(3t)+\sin t$.

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}-A \Leftrightarrow A=\frac{2}{3}$

3. $f(t)=-\frac{1}{3}\sin(3t)+\frac{2}{3}\cos(3t)+\sin t$ donc on a : $F(t)=\frac{1}{9}\cos(3t)+\frac{2}{9}\sin(3t)-\cos t$ est une primitive de f.

La valeur moyenne de la fonction *g* sur l'intervalle

$$\mu=\frac{1}{\pi/3-0}\int_0^{\pi/3} f(x)dx=\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3} f(x)dx=\frac{3}{\pi}\left[F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F(0)\right].$$

$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{9}\cos(\pi)+\frac{2}{9}\sin(\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{9}-\frac{1}{2}=\frac{-2-9}{18}=\frac{-11}{18}$; $F(0)=\frac{1}{9}\cos(0)+\frac{2}{9}\sin(0)-\cos 0=\frac{1}{9}-1=-\frac{8}{9}$

$$\mu=\frac{3}{\pi}\left[F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F(0)\right]=\frac{3}{\pi}\left[\frac{-11}{18}+\frac{8}{9}\right]=\frac{3}{\pi}\left[\frac{-11}{18}+\frac{16}{18}\right]=\frac{5}{6\pi}$$