

corrigé

Exercice 4

1. Résolution l'équation différentielle (E) : $u'' + 3600\pi^2 u = 0 \Leftrightarrow u'' + (60\pi)^2 u = 0$

Donc : $u(t) = A\cos(60\pi t) + B\sin(60\pi t)$

2. Recherche de la solution particulière f vérifiant les deux conditions initiales :

On a : $f(t) = A\cos(60\pi t) + B\sin(60\pi t)$ Donc : $f'(t) = -60\pi A\sin(60\pi t) + 60\pi B\cos(60\pi t)$

$$f\left(\frac{1}{180}\right) = 0 \Leftrightarrow A\cos\left(\frac{60\pi}{180}\right) + B\sin\left(\frac{60\pi}{180}\right) = 0 \Leftrightarrow A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad . \quad A + B\sqrt{3} = 0$$

$$f'(0) = -60\pi A\sin(0) + 60\pi B\cos(0) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 60\pi B = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow B = -\frac{1}{120}$$

En utilisant la première relation entre A et B, on trouve : $A = -B\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{120}$

Donc, la solution de (E) vérifiant les deux conditions initiales est donnée par :

$$f(t) = \frac{\sqrt{3}}{120}\cos(60\pi t) - \frac{1}{120}\sin(60\pi t)$$

3. a) On utilise la formule d'addition : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$f(t) = \frac{1}{60}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(60\pi t) - \frac{1}{2}\sin(60\pi t)\right) = \frac{1}{60}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(60\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(60\pi t)\right)$$

$$\text{Donc, on a bien : } f(t) = \frac{1}{60}\cos\left(60\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

3. b) Calcul de la valeur moyenne :

$$\text{Soit } F \text{ une primitive de } f : F(t) = \frac{1}{3600}\sin\left(60\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$I_m = 90 \int_0^{1/90} f(t) dt = 90[F(t)]_0^{1/90} = 90\left(F\left(\frac{1}{90}\right) - F(0)\right) = 90\left(\frac{1}{3600}\sin\left(\frac{60\pi}{90} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3600}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$I_m = 90\left(\frac{1}{3600}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{7200}\right) = \frac{1}{40}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{40}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Donc la valeur moyenne sur cet intervalle est nulle.