Corrigé

Exercice 5

1. L'équation différentielle $y''+10^4\pi^2 y=0$ est de la forme $y''+\omega^2 y=0$, avec $\omega^2=10^4\pi^2$.
La solution générale est de la forme $y(t)=A\cos\left(10^2\pi t\right)+B\sin\left(10^2\pi t\right)$ où $A\,et\,B$ sont des réels quelconques.

2. La fonction *f* est solution de cette équation, donc *f* est de la forme $f(t)=A\cos\left(10^2\pi t\right)+B\sin\left(10^2\pi t\right)$.
La courbe représentative de *f* passe par le point A(0; 1), donc *f*(0) = 1, ce qui se traduit par : *f* (0) = 1.
Donc : $f(0)=A\cos\left(10^2\pi\times 0\right)+B\sin\left(10^2\pi\times 0\right)=A=1$
La tangente à cette courbe en A a pour coefficient directeur -100π, donc : $f'(0)=-100\pi$.
Or, $f'(t)=-10^2\times A\sin\left(10^2 t\right)+10^2\times B\cos\left(10^2\pi t\right)$. $f'(0)=-100\pi$ équivaut à :
$f'(0)=-10^2\pi\times A\sin\left(10\pi^2\times 0\right)+10^2\pi\times B\cos\left(10^2\pi\times 0\right)=100\pi\times B=-100\pi$ .Donc $B=-1$
D'où : pour tout réel *t*, $f(t)=\cos(100t)-\sin(100\pi t)$

3. Pour tout réel *t*, on a : $\sqrt{2}\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left[\cos(100\pi t)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin(100\pi t)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$\sqrt{2}\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left[\cos(100\pi t)\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin(100\pi t)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\cos(100\pi t)-\sin(100\pi t)=f(t)$$

D'où : pour tout réel *t* : $f(t)=\sqrt{2}\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$

4. Valeur moyenne μ de ***f*** sur l'intervalle $[0;1/50]$:

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt=\frac{1}{1/50-0}\int_0^{1/50}\sqrt{2}\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)dt=50\sqrt{2}\int_0^{1/50}\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$\mu=\frac{50\sqrt{2}}{100\pi}\left[\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{1/50}=\frac{50\sqrt{2}}{100\pi}\left[\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{50\sqrt{2}}{100\pi}\left(\sin\left(100\pi\times\frac{1}{50}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(100\pi\times 0+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\mu=\frac{50\sqrt{2}}{100\pi}\left(\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{50\sqrt{2}}{100\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=0$$

D'où : $\mu=1$

5. Valeur efficace de la fonction ***f*** sur l'intervalle $[0;1/50]$:

On sait que $\cos^2(a)=\frac{\cos(2a)+1}{2}$, donc $I^2=50\times\int_0^{1/50}f(t)^2dt=50\int_0^{1/50}\left(\sqrt{2}\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2dt$

$$I^2=50\times\int_0^{1/50}f(t)^2dt=50\times 2\int_0^{1/50}\left(\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2dt=50\int_0^{1/50}\left(1+\cos 2\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right)dt$$

$$I^2=50\int_0^{1/50}\left(1+\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\right)dt=50\left[t+\frac{1}{200\pi}\sin\left(200\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{1/50}$$

$$I^2=50\left[\frac{1}{50}+\frac{1}{200\pi}\sin\left(200\pi\times\frac{1}{50}+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{200\pi}\sin\left(200\pi\times 0+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$I^2=50\left[\frac{1}{50}+\frac{1}{200\pi}\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{200\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=50\left[\frac{1}{50}+\frac{1}{200\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{200\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=1$$

D'où : la valeur efficace de la fonction *f* sur l'intervalle $[0;1/50]$ est : I = 1.