Corrigé

Exercice 7

1 . L'équation $4y''+y=0$ soit $y''+\frac{1}{4}y=0$ est une équation différentielle du deuxième ordre sans second membre de la forme $y''+w^2y=0$ avec $w=\frac{1}{2}$.. Les solutions sont les fonctions de la forme :

Ses solutions sont les fonctions de la forme : $f(x)=A\cos wx+B\sin wx$; avec $A\in\mathbb{R}$; $B\in\mathbb{R}$; $x\in\mathbb{R}$

et donc ici : $f(x)=A\cos\frac{x}{2}+B\sin\frac{x}{2}$ avec $x\in\mathbb{R}$

2. Puisque $f'(x)=-\frac{A}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{B}{2}\cos\frac{x}{2}$ donc si $f(0)=-\frac{3}{2}$ alors $A=-\frac{3}{2}$ et si $f'(0)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ alors $\frac{B}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

et donc $B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .La solution particulière cherchée est donc la fonction $f(x)=\frac{-3}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

3.a $f(x)=\frac{-3}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{7\pi}{6}\sin\frac{x}{2}\right)$ donc $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)$

b. $f(x)=1$ si et seulement si $\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ soit ssi $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ soit $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$

on a donc $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad \frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ d'où $\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad ou \quad \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$.

et $\begin{cases}x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi \quad ou \quad x=\frac{5\pi}{3}+4k\pi\end{cases}$ dans l'intervalle $[0;4\pi[$ les solutions sont $x=\frac{3\pi}{2}$ et $x=\frac{5\pi}{3}$

4. la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\pi/3]$ est égale : $m=\frac{1}{(\pi/3)-0}\int_0^{\pi/3}f(x)dx$

$m=\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)dx$; $m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)\right]_0^{\pi/3}$; $m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]$

$m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin(-\pi)+\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$; $m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\frac{-1}{2}\right]$; $m=-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$.