

Corrigé

Exercice 8

(E) $4y'' + 49y = 0$. $y'' + \frac{49}{4}y = 0$ et $y'' + \left(\frac{7}{2}\right)^2 y = 0$ L'équation différentielle (E) est de la forme $y'' + w^2 y = 0$

avec $w = \frac{7}{2}$. Donc ses solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = A \cos wx + B \sin wx$, les solutions de cette équation sont donc les fonctions : $f(x) = A \cos\left(\frac{7}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{7}{2}x\right)$ où A et B sont deux constantes réelles.

$$\begin{aligned} 2. \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -1 \text{ et } f(\pi) = 1. \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = A \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + B \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \Leftrightarrow A \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + B \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \\ &-A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - B\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow A\sqrt{3} + B = 2. \quad f(\pi) = 1 \text{ et } f(\pi) = A \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + B \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) \Leftrightarrow A \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) + B \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow B(-1) = 1 \Leftrightarrow B = -1. \quad \begin{cases} A\sqrt{3} + B = 2 \\ B = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{3}A = 3 \\ B = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1 \\ A = \sqrt{3} \end{cases}. \quad \text{Donc } f(x) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{7}{2}x\right) - \sin\left(\frac{7}{2}x\right) \end{aligned}$$

$$3. \quad f(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{7}{2}x\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{7}{2}x\right) \right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{7}{2}x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{7}{2}x\right) \right) = 2 \cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \int_0^{\pi/7} f(x) dx &= 2 \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \cos\left(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) dx = 2 \left[\frac{2}{7} \sin\left(\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) \right]_0^{\pi/7} = \left(\frac{4}{7} \sin\left(\frac{7}{2} \times \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{4}{7} \sin\left(\frac{7}{2} \times 0 + \frac{\pi}{6}\right) \right) \\ &= \left(\frac{4}{7} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{4}{7} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{4}{7} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{4}{7} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Ce résultat signifie que les aires comprises entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = -\frac{\pi}{6}$

et $x = \frac{7\pi}{6}$, positives et négatives se compensent du fait de la période de la fonction f.

$$5^\circ. \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } f(0) = -\sqrt{2}. \quad f(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = -\sqrt{2} = A. \quad f(x) = A \cos\left(\frac{7}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{7}{2}x\right)$$

$$\text{Puisque } f'(x) = -\frac{7A}{2} \sin\frac{7x}{2} + \frac{7B}{2} \cos\frac{7x}{2} \text{ donc si } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7A}{2} \sin\frac{7\pi}{4} + \frac{7B}{2} \cos\frac{7\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{7A}{2} \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{7B}{2} \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7A}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{7B}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7A}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{7B}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{alors } A + B = 0 \text{ et } B = -A = \sqrt{2} \quad f(x) = -\sqrt{2} \cos\frac{7x}{2} + \sqrt{2} \sin\frac{7x}{2}, \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = 2 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \cos\frac{7x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\frac{7x}{2} \right)$$

$$f(x) = 2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\frac{7x}{2} + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \sin\frac{7x}{2} \right). \text{ Donc } f(x) = 2 \cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$5b. \quad \frac{7}{2} \cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right) = u'(x) \cos u(x) \text{ avec } u(x) = \left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right). \text{ Une primitive de } u' \cos u \text{ est } \sin u, \text{ donc une primitive}$$

$$\text{de } \frac{7}{2} \cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right) \text{ est } \sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right), \text{ et une primitive de } \cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right) \text{ est } \frac{2}{7} \sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{14}} \int_{\pi/14}^{5\pi/14} f(x) dx = \frac{28}{4\pi} \int_{-\pi/14}^{5\pi/14} \cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right) dx = \frac{7}{\pi} \left[\frac{2}{7} \sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right) \right]_{\pi/14}^{5\pi/14} = \frac{2}{\pi} \left(\sin\left(\frac{7}{2} \times \frac{5\pi}{14} - \frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{7}{2} \times \frac{\pi}{14} - \frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{2}{\pi} (1 + 1) = \frac{4}{\pi} \text{ et } m = \frac{4}{\pi}$$