EXERCICE 3

1. La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur R telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.

a. Montrer que la fonction f définie sur R par $f(x) = e^{ax}$ où $a \in$ R est solution de l'équation $y' = a\,y$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = a\,y$. Soit h la fonction définie sur R par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.

Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = a\,y$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur R par: $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit une solution de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E0) : $y' = 2y$. En déduire les solutions de (E).

c. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(\pi/2) = 0$.