Corrigé exercice 4

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. a. Les solutions sont de la forme : $y(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$.

b. $\begin{cases} f(0) = 5 \Leftrightarrow A = 5 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow f'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) \Rightarrow 2B = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$

La solution s'écrit donc $y(t) = 5\cos(2t)$.

2. a. Sachant que $-1 \leq \cos(2t) \leq 1$ donc $-5\sqrt{2}e^{-t} \leq 5\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t) \leq 5\sqrt{2}e^{-t}$ puisque $5\sqrt{2}e^{-t} > 0$ pour tout réel $t > 0$.Conclusion : pour tout $t > 0$, on a :
$-5\sqrt{2}e^{-t} \leq 5\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t) \leq 5\sqrt{2}e^{-t}$.

b. Comme $t > 0$ $\lim\limits_{t \to +\infty} \pm 5\sqrt{2}e^{-t} = \pm 5\sqrt{2} \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$, ; donc par encadrement des limites $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Ceci montre que pour t assez grand le mobile va se rapprocher du point O.