EXERCICE 6

1. L' équation $4y'+5y=0$ est de la forme $y'=-\frac{5}{4}y$ avec $a=-\frac{5}{4}$, or on sait que les solutions de cette équation sont des fonctions y définies par $y=k\,e^{ax}=k\,e^{-\frac{5}{4}x}$ où k est une constante réelle quelconque.

2. $f(0)=2$, avec $f(x)=k\,e^{-\frac{5}{4}x}$, on obtient : $f(0)=k\,e^{0}=k=2$ et on a : $f(x)=2e^{-\frac{5}{4}x}$.

3. $V=\left(\pi\int_0^2 (f(x))^2\,dx\right)u.v$. $\left(f(x)\right)^2=\left(2e^{-(5/4)x}\right)^2=4e^{-(5/2)x}$.donc

$$\mathrm{V}=\left(\pi\int_0^2 (\mathrm{f}(\mathrm{x}))^2\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{u.v}=\left(\pi\int_0^2 4\mathrm{e}^{-(5/2)\mathrm{x}}\mathrm{dx}\right)\mathrm{u.v}=4\pi\left[-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-(5/2)\mathrm{x}}\right]_0^2\mathrm{u.v}=\frac{8}{5}\pi\left(-\mathrm{e}^{-5}+1\right)\mathrm{u.v}$$

EXERCICE 7

1. $2y'+y=0 \Leftrightarrow y'+\frac{1}{2}y=0$, donc l'équation différentielle (E) est de la forme $y'-ay=0$ avec $a=-\frac{1}{2}$.

et a pour solution de la forme $y=ke^{ax}$, où k est constante réelle .

donc (E) a pour solution : $y=ke^{-x/2}$.

2. f est solution de l'équation (E), vérifiant $f(0)=2$ donc $f(x)=ke^{-x/2}$.

$f(0)=ke^{0}=k=2$, puisque $e^{0}=1$ et par conséquent $f(x)=2e^{-\frac{x}{2}}$.

3. $\mathrm{M}=\frac{1}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=\frac{1}{2-0}\int_0^2\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\times 2\int_0^2\mathrm{e}^{-\mathrm{x}/2}\mathrm{dx}=\left[-2\mathrm{e}^{-\mathrm{x}/2}\right]_0^2$

$M=-2e^{-1}+2e^{0}=2\left(1-e^{-1}\right)=2\left(1-\frac{1}{e}\right)\approx 1{,}264$, $M\approx 1{,}3$ valeur arrondie à 10^{-1} près.

4. la fonction f est définie et dérivable sur R et on a : $f'(x)=2\times\frac{-1}{2}\times e^{-x/2}=-e^{-x/2}$.($\left(e^{ax}\right)'=ae^{ax}$)

On sait que la fonction $x\mapsto e^{ax}$ est strictement positive sur R , donc $f'(x)<0$ et par conséquent est strictement décroissante sur R , ce résultat nous conduit à éliminer le graphique 3

deux méthodes pour écarter le graphique 1. en effet :

1. $f'(0)=-1$ et l'équation de la tangente T en 0 a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x+2$.

En construisant la tangente on constate qu'elle coupe le graphique 1 en deux points , donc elle n'est tangente au graphique 1

2. Calculons $f(1)=2e^{-1/2}=\frac{2}{\sqrt{e}}\approx 1{,}21>1$, or sur le graphique 1 $f(1)<1$ ce qui permet d'éliminer le

graphique 1.Par conséquent le graphique qui donne la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$, est le graphique 2.

EXERCICE 8

1. Rappel : Les solutions de l'équation $y'=ay$ sont données par : $g(x)=ke^{ax}$ où k est un réel quelconque. $y'-2y=0 \Leftrightarrow y'=2y$. Donc les solutions sont les fonctions de la forme : $g(x)=ke^{2x}$ où k est un réel quelconque.

2.a La fonction $f(x)=e^{2x}$ est bien de la forme ke^{2x} et $f(0)=e^0=1$.

Donc $f(x)=e^{2x}$ est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0)=1$.

b. La fonction g est de la forme $g(x)=ke^{2x}$, où k est un réel à déterminer en utilisant la condition

initiale g(0) = 2. $g(0)=2 \Leftrightarrow ke^0=2 \Leftrightarrow k=2$ .Donc : $g(x)=2e^{2x}$

3.a **Coordonnées du point A :** $f(x)=2 \Leftrightarrow e^{2x}=2 \Leftrightarrow 2x\ln e=\ln 2 \Leftrightarrow x=(\ln 2)/2$

Donc le point A a pour coordonnées : $A\left((\ln 2)/2;2\right)$

Coordonnées du point B : $g(x)=2 \Leftrightarrow 2e^{2x}=2 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow x\ln e=\ln 1 \Leftrightarrow x=0$

Donc le point B a pour coordonnées : $B(0;2)$

3.b Le coefficient directeur de la droite tangente à la courbe représentative d'une fonction f au

point d'abscisse a est égal à $f'(a)$,on a : $f'(x)=2e^{2x}$ et $g'(x)=4e^{2x}$

$f'\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=2e^{\ln 2}=2e^{\ln 2}=2\times 2=4$. Donc le coefficient directeur de la tangente

T à *C* au point A est égal à 4. $g'(0)=4e^0=4$. Donc le coefficient directeur de la tangente

T' à *C'* au point B est égal à 4.

3.c. Les droites tangentes *T* et *T'* ont le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

EXERCICE 9

1. L'équation différentielle (H) $y'+y=0$ est une équation différentielle de premier ordre , linéaire , de la forme : $y'=-y$ ($y'=ay$ avec $a=-1$). La solution générale de cette équation est donnée par :

$y=k\,e^{-x}$ avec k une constante réelle.

2. $g(x)=ax+b$ est solution de l'équation (E) , $g(x)$ et $g'(x)$ vérifient l'équation (E).

Donc $g'(x)+g(x)=a+ax+b=ax+a+b=2x$, on obtient donc

$$\begin{cases} a=2 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=2 \text{ et } b=-a=-2.$$

Donc $g(x)=2x-2$.

3.a La fonction f est une fonction dérivable comme somme des fonctions dérivables sur R et

On a : $f'(x)=-ke^{-x}+2$. $f'(x)+f(x)=-ke^{-x}+2+ke^{-x}+2x-2=2x$ par conséquent la fonction f

est bien solution de l'équation différentielle (E).

b. $f(x)=ke^{-x}+2x-2$, $f(0)=0$, $f(0)=ke^{0}+2\times0-2=k-2=0$, donc $k=2$ et $f(x)=2e^{-x}+2x-2$.

4. a. $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[F(2)-F(0)\right]$

Or $f(x)=2e^{-x}+2x-2$, donc une primitive de f est : $F(x)=-2e^{-x}+x^2-2x$.

$F(2)=-2e^{-2}+2^2-2\times2=-2e^{-2}+4-4=-2e^{-2}$ et $F(0)=-2e^{0}+0^2-0=-2$

Donc $m=\frac{1}{2}\left[-2e^{-2}+2\right]=1-\frac{1}{e^2}\approx 0{,}86$.valeur arrondie à 10^{-2} près.

EXERCICE 10

1 .a. La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) :

(Juste) **Réponse a.** : (E) : $2y'+y=0$; **Réponse b.** : (E) : $2y'-y=0$; **Réponse c.** : (E) : $y'-y=0$. (y désigne une fonction inconnue définie sur l'ensemble des nombres réels de variable x ; y' désigne la fonction dérivée de la fonction y.)

b. La courbe C a pour asymptote la droite d'équation :

Réponse a. : $y=-2x$; **Réponse b** : $x=0$; (Juste) **Réponse c.** : $y=0$.

Question 3 :

La tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation :

Réponse a. : $y=-2x+2$; (Juste) **Réponse b.** : $y=-x+2$; Réponse c. : $y=x+2$.

2. On note S le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.La valeur V du volume du solide S est donnée par :

V = $\pi\int_0^2[f(x)]^2\,dx$ (en unités de volume).La valeur V du volume du solide S, en cm² est égale à :

(Juste) **Réponse a.** : $4\pi\left(1-e^{-2}\right)$; **Réponse b.** : $16\pi\left(1-e^{-2}\right)$; **Réponse c.** : $32\pi\left(1-e^{-2}\right)$.

EXERCICE 11

1. La solution générale de l'équation différentielle $y''+\omega^2y=0$ est de la forme $f(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$ où A et B sont deux réels. Ici, $\omega^2=25$ donc $\omega=5$.

Donc, la solution générale est donnée par : $f(x)=A\cos(5x)+B\sin(5x)$ où A et B sont deux réels.

2. On vérifie que la fonction f donnée par $f(x)=\sqrt{3}\cos(5x)-\sin(5x)$ vérifie les trois conditions données.

Tout d'abord, f est bien de la forme donnée à la question précédente avec $A=\sqrt{3}$ et $B=-1$ donc f est solution de (E).

Calculons $f(\pi/6)$: $f(\pi/6)=\sqrt{3}\cos(5\pi/6)-\sin(5\pi/6)=\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2$

Donc la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(\pi/6;-2)$.

Calcul de la dérivée : $f'(x)=-5\sqrt{3}\cos(5x)-5\sin(5x)$ (en utilisant $(\cos u)'=-u'\sin u$ et $(\sin u)'=u'\cos u$)

D'où : $f'(0)=-5\sqrt{3}\sin(0)-5\cos(0)=-5\sqrt{3}\times 0-5\times 1=-5$

Conclusion : la fonction f donnée vérifie bien les trois conditions.

Autre méthode

$$f(\pi/6)=A\cos(5\pi/6)+B\sin(5\pi/6)=A\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{B}{2}=-A\sqrt{3}+B=-4$$

$$f'(x)=-5A\sin(5x)+5B\cos(5x)\Rightarrow f'(0)=-5\times 0+5B=-5\Rightarrow B=-1$$

$$-A\sqrt{3}=-B-4=1-4=-3\Leftrightarrow A=\sqrt{3}$$

3. On utilise la formule d'addition trigonométrique :

$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ en prenant

$a=5x$ et $b=\pi/6$. On a donc : $f(x)=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(5x)-\frac{1}{2}\sin(5x)\right]=2\cos\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$

4. Soit F une primitive de f : $F(x)=\frac{2}{5}\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$ .Valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;\pi/6]$:

$$m=\frac{1}{(\pi/6)-0}\int_0^{\pi/6}f(x)dx=\frac{6}{\pi}[F(x)]_0^{\pi/6}=\frac{6}{\pi}\left[F(\pi/6)-F(0)\right]=\frac{12}{5\pi}\left[\sin\left(5\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\frac{12}{5\pi}\left[\sin(\pi)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{12}{5\pi}\left[0-\frac{1}{2}\right]=-\frac{6}{5\pi}$$