EXERCICE 16

1 . L'équation $4y''+y=0$ soit $y''+\frac{1}{4}y=0$ est une équation différentielle du deuxième ordre sans second membre de la forme $y''+w^2y=0$ avec $w=\frac{1}{2}$.. Les solutions sont les fonctions de la forme :

Ses solutions sont les fonctions de la forme : $f(x)=A\cos wx+B\sin wx$; avec $A\in\mathbb{R}$; $B\in\mathbb{R}$; $x\in\mathbb{R}$

et donc ici : $f(x)=A\cos\frac{x}{2}+B\sin\frac{x}{2}$ avec $x\in\mathbb{R}$

2. Puisque $f'(x)=-\frac{A}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{B}{2}\cos\frac{x}{2}$ donc si $f(0)=-\frac{3}{2}$ alors $A=-\frac{3}{2}$ et si $f'(0)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ alors $\frac{B}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

et donc $B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .La solution particulière cherchée est donc la fonction $f(x)=\frac{-3}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

3.a $f(x)=\frac{-3}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{7\pi}{6}\sin\frac{x}{2}\right)$ donc $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)$

b. $f(x)=1$ si et seulement si $\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ soit ssi $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ soit $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$

on a donc $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad \frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ d'où $\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad ou \quad \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$.

et $\begin{cases}x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi \quad ou \quad x=\frac{5\pi}{3}+4k\pi\end{cases}$ dans l'intervalle $[0;4\pi[$ les solutions sont $x=\frac{3\pi}{2}$ et $x=\frac{5\pi}{3}$

4. la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;\pi/3]$ est égale : $\mathrm{m}=\frac{1}{(\pi/3)-0}\int_0^{\pi/3}\mathrm{f(x)dx}$

$m=\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi/3}\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)dx$; $m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)\right]_0^{\pi/3}$; $\mathrm{m}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right]$

$m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\sin(-\pi)+\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$; $m=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\left[\frac{-1}{2}\right]$; $m=-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$.

EXERCICE 17

(E) $4y''+49y=0$. $y''+\frac{49}{4}y=0$ et $y''+\left(\frac{7}{2}\right)^2y=0$ L'équation différentielle (E) est de la forme $y''+w^2y=0$

avec $w=\frac{7}{2}$ .Donc ses solutions sont les fonctions définies sur R de la forme f(x) = A cos w x + B sin w x , les solutions de cette équation sont donc les fonctions : $f(x)=A\cos\left(\frac{7}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$ où A et B sont deux constantes réelles.

2. $f(\frac{\pi}{3})=-1$ et $f(\pi)=1$. $f(\frac{\pi}{3})=A\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+B\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\Leftrightarrow A\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+B\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow$

$-A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-B\left(\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow A\sqrt{3}+B=2.$ $f(\pi)=1$ et $f(\pi)=A\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)+B\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$

$A\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)+B\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=1$

$\Leftrightarrow B(-1)=1 \Leftrightarrow B=-1$. $\begin{cases}A\sqrt{3}+B=2\\ B=-1\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{3}A=3\\ B=-1\end{cases}$ $\{B=-1$; $A=\sqrt{3}$. Donc

$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{2}x\right)-\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$

3. $f(x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{7}{2}x\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{7}{2}x\right)\times\sin(\frac{\pi}{4})\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{7}{2}x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{7}{2}x\right)\right)=2\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

4. $\int_0^{\pi/7} f(x)dx=2\int_{-\pi/6}^{7\pi/6}\cos(\frac{7}{2}x+\frac{\pi}{6})dx=2\left[\frac{2}{7}\sin(\frac{7}{2}x+\frac{\pi}{6})\right]_0^{\pi/7}=\left(\frac{4}{7}\sin(\frac{7}{2}\times\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{6})-\frac{4}{7}\sin(\frac{7}{2}\times 0+\frac{\pi}{6})\right)$

$\left(\frac{4}{7}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})-\frac{4}{7}\sin(\frac{\pi}{6})\right)=\frac{4}{7}\left(\sin(\frac{2\pi}{3})-\sin(\frac{\pi}{6})\right)=\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$

Ce résultat signifie que les aires comprises entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x=-\frac{\pi}{6}$ et $x=\frac{7\pi}{6}$, positives et négatives se compensent du fait de la période de la fonction f.

5°. $f'(\frac{\pi}{2})=0$ et $f(0)=-\sqrt{2}$. $f(0)=A\cos(0)+B\sin(0)=-\sqrt{2}=A$. $f(x)=A\cos\left(\frac{7}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$

Puisque $f'(x)=-\frac{7A}{2}\sin\frac{7x}{2}+\frac{7B}{2}\cos\frac{7x}{2}$ donc si $f'(\frac{\pi}{2})=0 \Leftrightarrow f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{7A}{2}\sin\frac{7\pi}{4}+\frac{7B}{2}\cos\frac{7\pi}{4}=0$ $\Leftrightarrow$

$-\frac{7A}{2}\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{7B}{2}\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{7A}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{7B}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\frac{7A}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{7B}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

alors $A+B=0$ et $B=-A=\sqrt{2}$ $f(x)=-\sqrt{2}\cos\frac{7x}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{7x}{2}$, $x\in$ R $\Leftrightarrow$

$f(x)=2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\cos\frac{7x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{7x}{2}\right)$ $f(x)=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\frac{7x}{2}+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\frac{7x}{2}\right)$. Donc

$f(x)=2\cos\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$

5b. $\frac{7}{2}\cos\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)=u'(x)\cos u(x)$ avec $u(x)=\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$. Une primitive de $u'\cos u$ est $\sin u$, donc une primitive de $\frac{7}{2}\cos\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$ est $\sin\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$, et une primitive de $\cos\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$ est $\frac{2}{7}\sin\left(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\frac{1}{\frac{5\pi}{14}-\frac{\pi}{14}}\int_{\pi 14}^{5\pi/14} f(x)dx = \frac{28}{4\pi}\int_{-\pi/14}^{5\pi/14}\cos(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4})dx = \frac{7}{\pi}\left[\frac{2}{7}\sin(\frac{7}{2}x-\frac{3\pi}{4})\right]_{\pi 14}^{5\pi/14}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\sin(\frac{7}{2}\times\frac{5\pi}{14}-\frac{3\pi}{4})-\sin(\frac{7}{2}\times\frac{\pi}{14}-\frac{3\pi}{4})\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\sin(\frac{\pi}{2})-\sin(\frac{-\pi}{2})\right)=\frac{2}{\pi}(1+1)=\frac{4}{\pi} \text{ et } m=\frac{4}{\pi}$$

EXERCICE 18

1. L'équation y'' + y = 0 est une équation différentielle du deuxième ordre sans second membre de la forme $y''+w^2y=0$ avec w = 1. Les solutions sont les fonctions de la forme :

$f(x) = A\cos x + B\sin x$; $A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}$.

2.a . La courbe représentative de la fonction f passe par le point (0 ; 1) donc f(0) = 1, elle

admet en ce point une tangente, parallèle à la droite y = x donc f '(0) = 1.

b . On a f ' de la forme $f'(x) = -A\sin x + B\cos x$ d'où si $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$

d'où $f(x) = \cos x + \sin x \quad x \in \mathbb{R}$

c .

$$f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

3 . $m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$

$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$$m = \frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\pi} = \frac{2}{\pi} .$$