

EXERCICE 19

1. Pour tout $x \in [0; 20]$: $f^2(x) - g(x)^2 = \left(2\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 6\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 4\right)^2$ soit

$$f^2(x) - g(x)^2 = \left(4\cos^2\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 24\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 36\right) - \left(\cos^2\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 8\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 16\right)$$

$$f^2(x) - g(x)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 24\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 36 - \cos^2\left(\frac{\pi x}{20}\right) - 8\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) - 16$$

$$f^2(x) - g(x)^2 = 3\cos^2\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 16\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 20$$

$$f^2(x) - g(x)^2 = 3 \frac{\cos\left(\frac{2\pi x}{20}\right) + 1}{2} + 16\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 20 \quad \cdot \quad f^2(x) - g(x)^2 = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{3}{2} + 16\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 20$$

$$f^2(x) - g(x)^2 = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 16\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + \frac{43}{2}$$

$$2. \int_0^{20} f(x)^2 - g(x)^2 dx = \int_0^{20} \left(2\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 6\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + 4\right)^2 dx = \int_0^{20} \left(\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 16\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) + \frac{43}{2}\right) dx$$

Une primitive de $x \rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)$ est $x \rightarrow \frac{10}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)$; car une primitive de la fonction

$x \rightarrow \cos(ax + b)$

est $x \rightarrow \frac{1}{a} \sin(ax + b)$. Une primitive de $x \rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)$ est $x \rightarrow \frac{20}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right)$.

D'où le calcul $\int_0^{20} f(x)^2 - g(x)^2 dx = \left(\frac{3}{2} \times \frac{10}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) + 16 \times \frac{20}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) + \frac{43}{2} x\right)_0^{20}$

$$= \left(\frac{30}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \frac{320}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{20}\right) + \frac{43}{2} x\right)_0^{20}$$

$$\int_0^{20} f(x)^2 - g(x)^2 dx = \left(\frac{30}{2\pi} \sin(2\pi) + \frac{320}{\pi} \sin(\pi) + \frac{43}{2} \times 20 - 0\right) = 430$$

L'intégrale cherchée vaut 430.

b) Le volume de la tuyère est égal au volume du solide (S1) obtenu par rotation autour de l'axe (O x) du domaine limité par l'arc $\overline{AB}$, l'axe (O x) et les droites d'équation $x = 0$, $x = 20$, diminué du volume du solide (S2 obtenu par rotation autour de l'axe (O x) du domaine limité par l'arc $\overline{BD}$, l'axe (O x) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 20$.

Le volume du solide (S1) est $V_1 = \pi \int_0^{20} f(x)^2 dx$. Le volume du solide (S2) est

$$V_2 = \pi \int_0^{20} g(x)^2 dx$$

Le volume de la tuyère, en unités de volume, vaut :

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^{20} f(x)^2 dx - \pi \int_0^{20} g(x)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^{20} f(x)^2 - g(x)^2 dx, \text{ d'après la linéarité de l'intégrale. } V = 430 \pi \text{ cm}^3, \text{ d'après la question 2°) a).}$$

EXERCICE 20

1 a. L'équation $y'' + y = 0$ est une équation différentielle du deuxième ordre sans second membre de la forme

$y'' + w^2 y = 0$ avec $w = 1$. On déduit la solution générale de l'équation (E)

$$f(x) = A \cos x + B \sin x ; A \in \mathbb{R} ;$$

$$B \in \mathbb{R} ; x \in \mathbb{R} .$$

b. On a f' de la forme $f'(x) = -A \sin x + B \cos x$ d'où si $f(0) = 1$ $f'(0) = 1$ alors $A = 1$ et $B = 1$

$$f(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = A = 1 \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -A \sin \frac{\pi}{4} + B \cos \frac{\pi}{4} ; -A \frac{\sqrt{2}}{2} + B \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ et } -A + B = 0$$

$$\text{alors } A = 1 \text{ et } B = 1 \text{ d'où } f(x) = \cos x + \sin x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$c. \quad f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) ; x \in \mathbb{R} .$$

2. $f^2(x) = (\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$, $f^2(x) = 1 + \sin 2x$ ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $2 \sin x \cos x = \sin 2x$)

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} [f(x)^2] dx ; V = \pi \int_0^{\pi/2} [1 + \sin 2x] dx = [1 - 2 \cos 2x]_0^{\pi/2} = (1 - 2 \cos \pi) - (1 - 2 \cos 0)$$

$$V = \pi [(1 - 2 \cos \pi) - (1 - 2 \cos 0)] = \pi [(1 - 2(-1)) - (1 - 2)] = \pi [(1 + 2) - (-1)] = \pi (3 + 1) = 4\pi$$

EXERCICE 21

a. $f'(x) = a e^{ax} = a f(x)$ donc $f(x) = e^{ax}$ est une solution de l'équation $y' = a y$

b. $h'(x) = g'(x) e^{-ax} - a g(x) e^{-ax} = a g(x) e^{-ax} - a g(x) e^{-ax} = 0$, donc $h(x) = C$ où C est une constante réelle.

$$c. \quad h(x) = C = g(x) e^{-ax} \Rightarrow g(x) = C e^{ax} .$$

2. $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$ si

$$f_0'(x) = 2 f_0(x) + \cos x \Leftrightarrow -a \sin x + b \cos x = 2(a \cos x + b \sin x) + \cos x \Rightarrow \begin{cases} -a = 2b \\ b = 2a + 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{5}; a = \frac{-2}{5} .$$

$y' = 2y$ a pour solution $y = C e^{2x}$. f est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{cases} f' = 2f + \cos x \\ f_0' = 2f_0 + \cos x \end{cases} \Leftrightarrow f' - f_0' = 2(f - f_0), \text{ soit } f - f_0 \text{ solution de } (E_0)$$

Les solutions de (E) sont données par $f - f_0 = C e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = \left(\frac{-2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x \right) + C e^{2x} .$

$$f(\pi/2) = \left(\frac{-2}{5} \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{5} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) + C e^{\pi} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{-1}{5} e^{-\pi} .$$