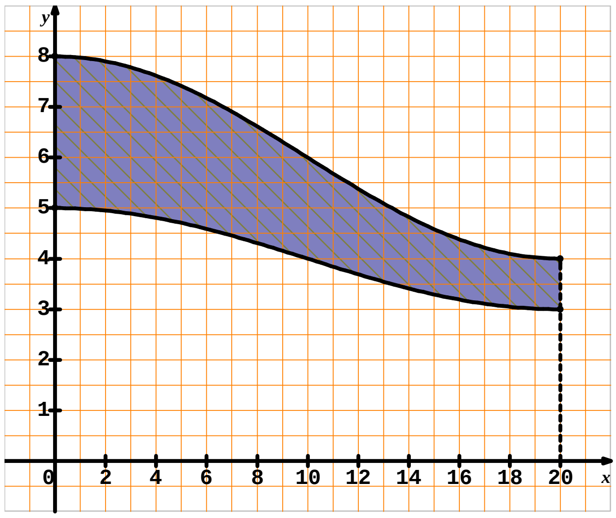
EXERCICE 19

On veut calculer le volume d'une tuyère, engendrée par la rotation de la partie comprise entre les deux Courbes ci-contre autour de l'axe des abscisses.

1-Donner la solution générale de l'équation différentielle : $400y''+\pi^2 y=0$.

2- Déterminer la solution f de cette équation qui vérifie f(0) = 2 et f'(0) = 0, la solution g qui vérifie g(0) = 1 et g(10) = 0.

La courbe du haut est la représentation de f(x) + 6, le courbe du bas celle de g(x) + 4.



3) Montrer que

$$\left(2\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)+6\right)^2-\left(\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)+4\right)^2=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)+16\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)+\frac{43}{2}.$$

On rappelle que : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$

4) On rappelle que si h est une fonction dérivable et positive sur $[a;b]$ et si E est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $a\le x\le b$ et $a\le y\le h(x)$, alors le volume engendré par la rotation de la courbe d'une fonction h autour de l'axe des abscisses vaut $v=\pi\int_a^b h^2(x)dx$.

a) calculer $\int_0^{20}\left(2\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)+6\right)^2-\left(\cos(\left(\frac{\pi x}{20}\right)+4\right)^2 dx$

b) En déduire le volume de la tuyère (l'unité de longueur est 10 cm)

EXERCICE 20

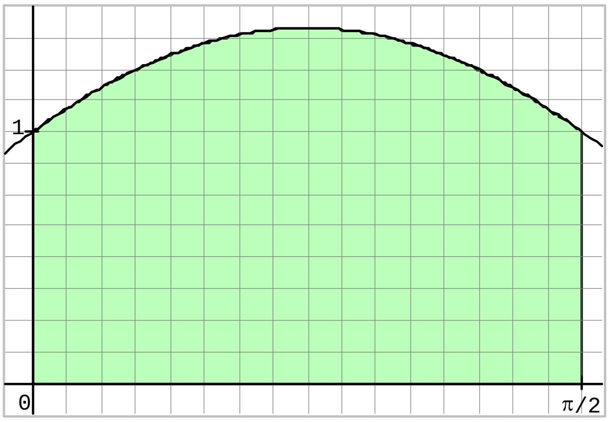
1. (a) Résoudre l'équation différentielle $y''+y=0$ = 0 , où y désigne une fonction définie et deux fois dérivable sur R et où y'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction y.

(b) Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle vérifiant : f (0) = 1 et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. (f ' désigne la fonction dérivée de la fonction f)

2.L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ d'unité graphique 4cm.

Le but de cette question est de calculer le volume V

engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses,
du domaine D hachuré sur le dessin ci-contre.
Dans le plan rapporté au repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ le domaine D
est limité par :
_ la courbe représentative de la fonction f trouvée à
la question précédente ; l'axe des abscisses ;
_ l'axe des ordonnées ;
_ la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par
le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.



(a) Montrer que pour tout x réel : $\left[f(x)\right]^2=1+\sin 2x$.

(b) Sachant que : $V=\int_0^{\pi/2}\left[f(x)^2\right]dx$, calculer la valeur exacte de V, puis donner la valeur approchée
de V en cm³, arrondie au mm³ par défaut.

EXERCICE 21

1. La fonction $x\mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur R telle que $\varphi'=\varphi$, et $\varphi(0)=1$.

a. Montrer que la fonction f définie sur R par $f(x)=e^{ax}$ où $a\in R$ est solution de l'équation $y'=a\,y$.

b. Soit g une solution de l'équation $y'=a\,y$. Soit h la fonction définie sur R par $h(x)=g(x)e^{-ax}$.
Montrer que h est une fonction constante.

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y'=a\,y$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y'=2y+\cos x$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur R par: $f_0(x)=a\cos x+b\sin x$ soit une solution de (E).

b. Résoudre l'équation différentielle (E0) : $y'=2y$. En déduire les solutions de (E).

c. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(\pi/2)=0$.