

Corrigé

Problème 1

1. Limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 16$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 16$ en $-\infty$.



2. a) On développe : $(e^x - 2)(e^x - 8) = e^{2x} - 8e^x - 2e^x + 16 = e^{2x} - 10e^x + 16$

2. b) Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 8) = +\infty$ Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3. a. Pour tout réel x , on a : $f'(x) = 2e^{2x} - 10e^x = 2e^x(e^x - 5)$.

3. b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, on a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 5 = 0 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$

De même : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5$

On obtient donc le tableau de signe suivant pour la dérivée et les variations de la fonction :

Avec : $f(\ln 5) = e^{2\ln 5} - 10e^{\ln 5} + 16 = e^{\ln 25} - 10 \times 5 + 16$
 $f(\ln 5) = 25 - 50 + 16 = -9$

x	$-\infty$	$\ln 5$	$+\infty$
$e^x - 5$	-	0	+
$2e^x$	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	16	-9	$+\infty$

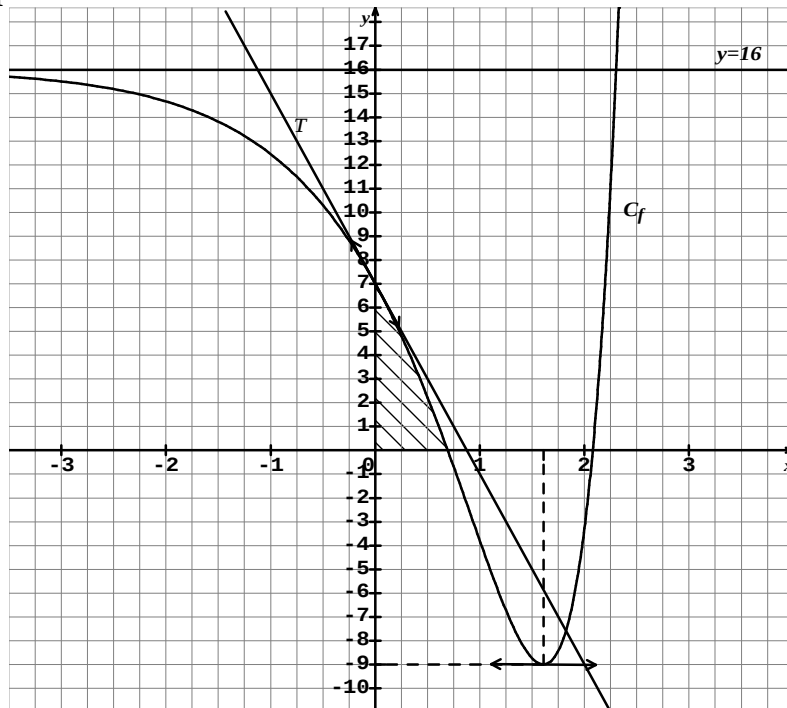
4. Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$	15,5	14,7	12,5	7	-3,8	-3,3	7,2

5. a) Le coefficient directeur de la droite tangente au

point d'abscisse 0 est égal au nombre dérivé en 0, c'est-à-dire $f'(0)$: $f'(0) = 2e^0(e^0 - 5) = 2(1 - 5) = -8$

5. b) et 5. c) Courbe représentative



6. a) $f(\ln 2) = e^{2\ln 2} - 10e^{\ln 2} + 16 = e^{\ln 4} - 10 \times 2 + 16 = 4 - 20 + 16 = 0$

Sur l'intervalle $[0; \ln 2]$ la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, donc $f(x) \geq 0$.

b) Calcul de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0; \ln 2]$.

$$I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx = \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 10e^x + 16) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - 10e^x + 16x \right]_0^{\ln 2} = \left(\frac{e^{2\ln 2}}{2} - 10e^{\ln 2} + 16 \times \ln 2 \right) - \left(\frac{e^0}{2} - 10e^0 + 16 \times 0 \right)$$

$$I = \left(\frac{e^{\ln 4}}{2} - 10 \times 2 + 16 \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 10 \right) = (2 - 20 + 16 \ln 2) - \left(-\frac{19}{2} \right) = -18 + 16 \ln 2 + 9,5 = -8,5 + 16 \ln 2.$$

La fonction f étant positive sur $[0; \ln 2]$, alors l'intégrale est égale à l'aire en unité d'aires ; l'unité d'aire est égale à $2 \times 0,5 = 1 \text{ cm}^2$ donc : $(-8,5 + 16 \ln 2) \text{ cm}^2$. 6. c) $(-8,5 + 16 \ln 2) \approx 2,59 \text{ cm}^2$