

Problème 3

Partie A

1. La courbe passe par le point de coordonnées $(\ln 2; 2)$ donc $f(\ln 2) = 2$.

La courbe passe par le point de coordonnées $A(0; 3)$ donc $f(0) = 3$.

2. La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 2$ donc $f'(\ln 2) = 0$.

La courbe admet une tangente de coefficient directeur -2 d'abscisse 0 donc $f'(0) = -2$.

3. La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 6$ en $-\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$.

Partie B

1. On développe : $(e^x - 2)^2 + 2 = (e^x)^2 - 2e^x \times 2 + 2^2 + 2 = e^{2x} - 4e^x + 6$. Donc : $f(x) = (e^x - 2)^2 + 2$

2. Calcul de $f(\ln 2)$: $f(\ln 2) = (e^{\ln 2} - 2)^2 + 2 = (2 - 2)^2 + 2 = 2$

3. a) On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 6$

3. b) Le calcul de cette limite prouve l'existence de l'asymptote horizontale d'équation $y = 6$ en $-\infty$.

4. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2)^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5. a) $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$

5. b) Pour tout réel x , on a $e^x > 0$ donc : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

5. c) Pour tout réel x , on a $e^x > 0$ donc : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$

5. d) Signe de $f'(x)$ et variations de f

6. Démontrons que l'équation $f(x) = 7$ admet une solution unique sur $\mathbf{R}$

- la fonction f est dérivable sur $[\ln 2; +\infty[$;

- la fonction f est strictement croissante sur $[\ln 2; +\infty[$;

- 7 est compris entre $f(\ln 2) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$e^x - 2$	-	0	+
$2e^x$	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	6	2	$+\infty$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(x) = 7$ admet une solution unique α sur $[\ln 2; +\infty[$.

L'équation $f(x) = 7$ n'admet pas de solution sur $]-\infty; \ln 2]$ car f est dérivable et strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2]$ de 6 à 2, et 7 n'appartient pas à l'intervalle $[2; 6]$. L'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}$. Encadrement de la solution $f(1) \approx 2,5$ et $f(2) \approx 31$, donc $1 \leq \alpha \leq 2$

$f(1,4) \approx 6,2$ et $f(1,5) \approx 8,2$ donc $1,4 \leq \alpha \leq 1,5$

Partie C

1. Calcul de la dérivée de F $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times e^{2x} - 4e^x + 6 = e^{2x} - 4e^x + 6$

On a pour tout réel x : $F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $\mathbf{R}$.

2. Voir courbe ci-dessous.

3. Calcul de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^{2x} - 4e^x + 6) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - 4e^x + 6x \right]_0^1$$

$$I = \left(\frac{e^2}{2} - 4e + 6 \right) - \left(\frac{e^0}{2} - 4e^0 + 0 \right)$$

$$I = \left(\frac{e^2}{2} - 4e + 6 - \frac{1}{2} + 4 \right) = \left(\frac{e^2}{2} - 4e + 9,5 \right)$$

La fonction étant positive sur $[0; 1]$, l'aire du domaine hachuré est donné par :

$$A = u.a \times I = 1 \times 1,5 \times \left(\frac{e^2}{2} - 4e + 9,5 \right) \text{ cm}^2$$

