Problème 4

Partie A : limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Calcul de la limite en $-\infty$ On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$.

Donc la courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y=4$ en $-\infty$.

2. a) On développe : $(e^x-1)(e^x-4)=e^{2x}-4e^x-e^x+4=e^{2x}-5e^x+4$.

2. b) Calcul de la limite en $+\infty$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-4)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Partie B : Intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses

Résolution de $f(x)=0$: $(e^x-1)(e^x-4)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \; ou \; e^x-4=0$

$\Leftrightarrow e^x=1 \; ou \; e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 1=0 \quad ou \quad x=\ln 4$

Donc les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $0 \; et \; \ln 4$.

Partie C : étude des variations de la fonction f

1. a) Calcul de la dérivée, en utilisant: $f'(x)=2e^{2x}-5e^x=e^x(2e^x-5)$

1. b) Une exponentielle étant toujours strictement positive, on a :

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^x-5=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$. De même : $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2e^x-5>0 \Leftrightarrow e^x>\frac{5}{2} \Leftrightarrow x>\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

On obtient le tableau de signe suivant pour la dérivée :

x	$-\infty$		$\ln(5/2)$		$+\infty$
$2e^x-5$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul de

$f(5/2)=e^{2\ln(5/2)}-5e^{\ln(5/2)}+4=e^{\ln(5/2)^2}-\frac{25}{2}+4$

$f(5/2)=\frac{25}{4}-\frac{50}{4}+\frac{16}{4}=-\frac{9}{4}$

3. On en déduit le tableau de variations suivant :

4. On en déduit le tableau de signes suivant pour la fonction f :

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. Représentation graphique

Partie D : calcul d'une aire

1. Soit F une primitive de f : $F(x)=\frac{e^{2x}}{2}-5e^x+4x$

2. a) Soit I l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0;\ln 4]$:

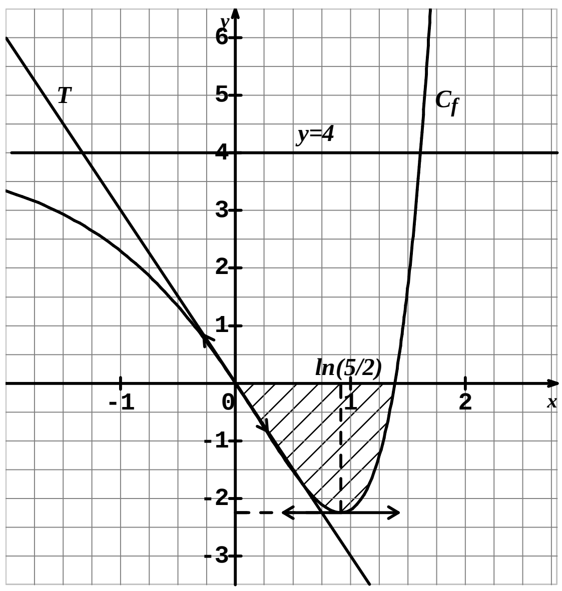
$$I=\int_0^{\ln 4} f(x)dx=\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-5e^x+4)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-5e^x+4x\right]_0^{\ln 4}$$

$$I=\left(\frac{e^{2\ln 4}}{2}-5e^{\ln 4}+4\ln 4\right)-\left(\frac{e^0}{2}-5e^0\right)$$

$$I=\left(\frac{e^{\ln 16}}{2}-5\times 4+4\ln 4-\frac{1}{2}+5\right)=\left(4\ln 4-\frac{15}{2}\right)$$

On a montré dans la partie précédente que la fonction f est négative sur l'intervalle $[0;\ln 4]$, donc l'aire est donnée en unités d'aires par :

$A=-I=-4\ln 4+\frac{15}{2}=7{,}5-8\ln 2$



2. b) L'unité d'aire est donnée par : $1u.a=2cm^2$ donc :

$A=2\times(7{,}5-8\ln 2)=15-16\ln 2\approx 3{,}91cm^2$.