Problème5

Partie I : Etude de la fonction f.

1. a) Limite en $+\infty$: on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-5x+2\right)e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-5x+2\right)\times\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-5x+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2\right)=+\infty$. De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

1. b) Limite en $-\infty$: En développant, on a : $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^x=2x^2e^x-5xe^x+2e^x$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}2x^2e^x=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}5xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ (axe des abscisses).

2. a) Calcul de la dérivée du produit $f(x)=\left(2x^2-5x+2\right)e^x$ **:** On pose $u=\left(2x^2-5x+2\right)$ et $v=e^x$. Donc :

$u'=4x-5$ et $v'=e^x$,donc $f'(x)=(4x-5)e^x+\left(2x^2-5x+2\right)e^x=\left(2x^2-x-3\right)e^x$

2. b) Etude du signe de $2x^2-x-3$: $\Delta=(-1)^2-4\times2\times-3=25$. donc $2x^2-x-3$ admet 2 racines réelles distinctes : $x_1=\dfrac{1-5}{2\times2}=-1$; $x_1=\dfrac{1+5}{2\times2}=\dfrac{3}{2}$. Pour tout x réel, on a $e^x>0$ donc $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ *et* $x=1{,}5$

Le trinôme $2x^2-x-3$ est du signe du coefficient devant x^2, donc positif, en dehors des racines.

x	$-\infty$		-1		$1{,}5$		$+\infty$
$2x^2-x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1{,}5)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. c) $f(-1)=\left(2\times(-1)^2-5\times(-1)+2\right)e^{-1}=(2+5+2)e^{-1}=9e^1$ et $f(1{,}5)=\left(2\times(1{,}5)^2-5\times(1{,}5)+2\right)e^{1{,}5}=-e^{1{,}5}\approx-4{,}48$

3. a) Existence et unicité de la solution de l'équation $f(x)=2$ sur [2 ; 3] :

La fonction *f* est dérivable sur l'intervalle [2 ; 3]

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle [2 ; 3] : $f(2)=0<2$ et $f(3)=100{,}4>2$.

Donc l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique α sur l'intervalle [2 ; 3].

On obtient les encadrements suivants pour α : $f(2{,}08)\approx1{,}74<2$ et $f(2{,}09)\approx2{,}02>2$, donc $2{,}08\le\alpha\le2{,}09$

4. voir graphique

Partie II: Calcul d'une intégrale.

1. Calcul de la dérivée du produit $F(x)=\left(2x^2-9x+11\right)e^x$:

On pose $u=2x^2-9x+11$ et $v=e^x$. Donc : $u=4x-9$ et $v'=e^x$.

$F'(x)=(4x-9)e^x+\left(2x^2-9x+11\right)e^x=\left(2x^2-5x+2\right)e^x=f(x)$ .Donc *F* est une primitive de *f*.

2. Calcul de l'intégrale I :

$$I=\int_{0,5}^{2}f(x)dx=\int_{0,5}^{2}\left(2x^2-5x+2\right)e^xdx=\left[\left(2x^2-9x+11\right)e^x\right]_{0,5}^{2}$$

$$I=\left(2\times2^2-9\times2+11\right)e^2-\left(2\times(0{,}5)^2-9\times0{,}5+11\right)e^{0,5}$$

$$I=e^2-7e^{0,5}\approx-4{,}15$$

3. Interprétation graphique de l'intégrale : On a $f(0{,}5)=0$ et $f(2)=0$. D'après les variations de la fonction *f*, on en déduit que $f(x)$ est négatif sur [0,5 ; 2].

L'intégrale I est donc égale à l'opposée de l'aire (en unités d'aires) délimitée par la courbe , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0{,}5$ et $x=2$ (voir partie hachurée sur le graphique).

L'unité d'aire associée à ce repère est égale à : $1u.a=2\times2=4cm^2$

L'aire de ce domaine est donc égal à : $A = -4\left(e^2 - 7e^{0,5}\right) = 28e^{0,5} - 4e^2$