Problème6

Partie A

1\. a) Déterminons la limite de la fonction f en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

1\. b) Montrons que si x est différent de zéro, on a : $f(x)=x^2e^{-x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$:

Pour tout réel x différent de zéro, $f(x)=(x+1)^2e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}=x^2e^{-x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

2\. a) Montrons que $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$: f est dérivable sur $\mathbf{R}$. Elle est de la forme uv, avec : $u=(x+1)^2$ et $v=e^{-x}$. u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ et on a : $u'=2(x+1)$ et $v'=-e^{-x}$

D'où, pour tout réel x, $f'(x)=2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}=\left[2(x+1)-(x+1)^2\right]e^{-x}=(1-x^2)e^{-x}$

2\. b) Etudions le signe de $f'(x)$:

Pour tout réel x, $e^{-x}>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x^2)=(1-x)(1+x)$, s'annule en 1 et -1, est négatif sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ et est positif sur $[-1;1]$. D'où : $f'(x)$ est négative sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ et est positive sur $[-1;1]$.

Tableau de variation de la fonction f sur $\mathbf{R}$: On a $f(-1)=(-1+1)^2e^{-(-1))}=0$ et $f(1)=(1+1)^2e^{-1}=4e^{-1}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

3\. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 :

Une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$, $f'(0)=1$ et $f(0)=1$. D'où : $y=1\times(x-0)+1=x+1$

4\. a) $f(x)-(x+1)=(x+1)^2e^{-x}-(x+1)=(x+1)\left[(x+1)e^{-x}-1\right]=(x+1)e^{-x}(x+1-e^x)$:

Pour tout réel x, on a : $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\times g(x)$ avec $g(x)=x+1-e^x$

4\. b) Calculons $g'(x)$: La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout réel x, on a : $g(x)=1-e^x$

Etudions le signe de $g'(x)$: $g'(x)>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow x\ln e<\ln 1\Leftrightarrow x<0$

car la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

Donc : $g'(x)>0$ sur $]-\infty;0[$, $g'(x)<0$ sur $]0;+\infty[$ et $g(0)=0$.

4\. c) Dressons le tableau de variations de la fonction g :

De la question précédente, on en déduit que g est croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

4\. d) D'après le tableau de variations précédent, la fonction g admet un maximum sur $\mathbf{R}$. Ce maximum est atteint en 0 et vaut 0. Donc, pour tout réel x, $g(x)\leq 0$.

Déduisons-en le signe de $f(x)-(x+1)$: Pour tout réel x, on a : $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\times g(x)$

Or, pour tout réel x $e^{-x}>0$, et $g(x)\leq 0$. et $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$. Etudions le signe de $f(x)-(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)-(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

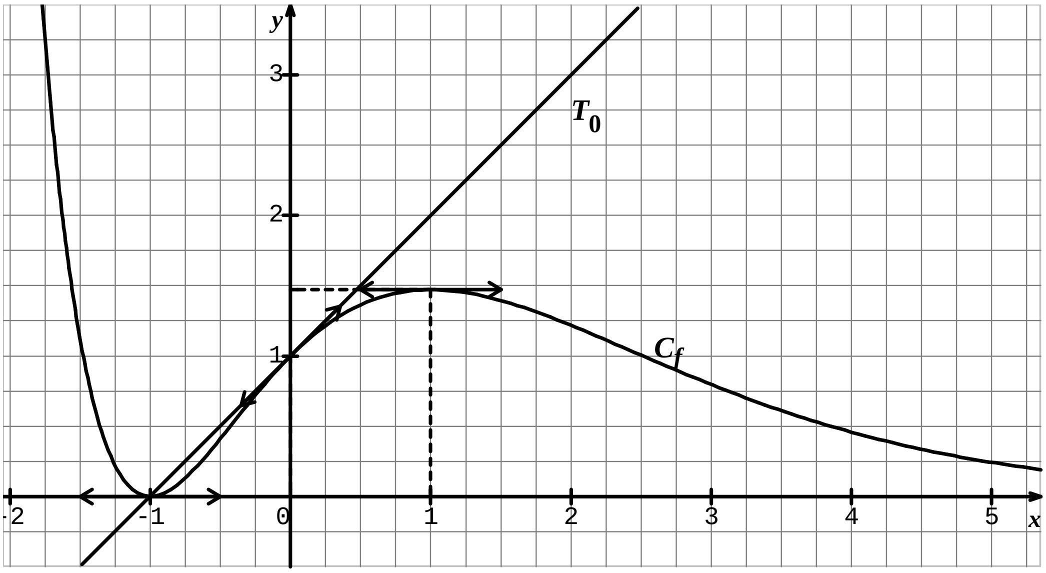
D'où : $f(x)-(x+1)>0$ sur $]-\infty;-1[$, $f(x)-(x+1)<0$ sur $]-1;0[$ ou sur $]0;+\infty[$ et $f(x)-(x+1)=0$ en -1 et 0.

4. e) Déduisons-en la position de C_f par rapport à T : $f(x)-(x+1)>0$ sur $]-\infty;-1[$,donc C_f est au-dessus de T sur $]-\infty;-1[$, $f(x)-(x+1)<0$ sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ donc C_f est en dessous de T sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, T et C_f se coupent aux points d'abscisse -1 et 0.

5. Complétons le tableau :

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$	7,39	0	0,41	1	1,36	1,47	1,22	0,80	0,46	0,12

Traçons C_f et T dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$:



Partie B

1. Pour tout réel x, $F(x)$ est dérivable. $F(x)=(-x^2-4x-5)e^{-x}$ .On pose : $u=-x^2-4x-5$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'=-2x-4$; $v=e^{-x}$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'=-e^{-x}$

Donc : $F'(x)=(-2x-4)e^{-x}-(-x^2-4x-5)e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}=(1+x)^2e^{-x}=f(x)$

D'où : F est une primitive de f .

2. Sur [0 ; 3], $f(x)\geq 0$, donc l'aire cherchée est donnée par :

$I=\int_0^3 f(x)dx=[F(x)]_0^3=F(3)-F(0)(3^2-4\times3-5)e^{-3}-(0^2-4\times0,5-5)e^{-0}=26e^{-3}+5$ .Donc $(26e^{-3}+5)u.a$:

Or, 1 u.a. = 2 × 2 cm² = 4 cm², donc l'aire en cm² de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe C_f et la droite d'équation $x=3$ est égale à $(26e^{-3}+5)u.a=4(26e^{-3}+5)cm^2\approx 14,82cm^2$, soit environ 14,82 cm² à 10^{-2} près.