➢ ***Problème 6***

On considère la courbe C_f représentant la fonction f définie sur **R** par $f(x)=(1+x)^2e^{-x}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (unité graphique 2 cm).

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b) Montrer que si x est différent de zéro on a : $f(x)=x^2e^{-x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Montrer que $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur **R**

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4. Etude de la position C_f par rapport à T.

a) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\times g(x)$ avec $g(x)=x+1-e^x$

b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

c) En déduire le signe de $g(x)$, puis de $f(x)-(x+1)$. En déduire la position de C_f par rapport à T.

5. Après avoir complété le tableau de valeurs ci-dessous, tracer T et C_f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Donner les valeurs

de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$										

<u>Partie B</u>

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=\left(-x^2-4x-5\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

2. Calculer l'aire en cm² de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe C_f et la droite d'équation $x=3$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.