Problème7

Partie A

1. On pose : $u = 4e^x$ et $v = e^x + 2$ d'où : $u' = 4e^x$ et $v' = e^x$ Donc :

$$g'(x) = a - \frac{4e^x(e^x+2) - 4e^{2x}}{(e^x+2)^2} = a - \frac{4e^{2x} + 8e^x - 4e^{2x}}{(e^x+2)^2} = a - \frac{8e^x}{(e^x+2)^2}$$

2. La courbe passe par le point $E(\ln 2\,;\ln 2)$ donc : $g(\ln 2) = \ln 2$

$$a\ln 2 + b - \frac{4e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)} = \ln 2 \Leftrightarrow a\ln 2 + b - \frac{8}{4} = \ln 2 \Leftrightarrow a\ln 2 + b - 2 = \ln 2$$

La tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses au point E, donc le coefficient directeur de cette tangente est nul, donc : $g'(\ln 2) = 0 \Leftrightarrow a - \frac{8e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+2)^2} = 0 \Leftrightarrow a - \frac{16}{4^2} = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

On réutilise ensuite la relation précédente entre a et b pour trouver b : $a\ln 2 + b - 2 = \ln 2 \Leftrightarrow b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$

La fonction g est donc donnée par : $g(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$

Partie B

1. On commence par faire apparaître l'expression $x+2$:

$$x - 2 - \frac{8}{e^x+2} = x + 2 - 4 + \frac{8}{e^x+2} = x - 2 + \frac{-4e^x - 8 + 8}{e^x+2} = x - 2 - \frac{4e^x}{e^x+2} = f(x)$$

2. Limite en $-\infty$: on utilise la 1ère forme

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4e^x}{e^x+2} = \frac{4\times 0}{0+2} = 0$. De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Limite en $+\infty$: on utilise la 2ème forme

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{e^x+2} = 0$. De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$ Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Montrons que la droite D_1 d'équation $y = x+2$ est asymptote en $-\infty$; on utilise la 1ère forme et on a :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - (x+2)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4e^x}{e^x+2} = 0$ .Donc la droite D_1 d'équation $y = x+2$ est asymptote en $-\infty$ à la courbe

Montrons que la droite D_2 d'équation $y = x-2$ est asymptote en $+\infty$; on utilise la 2ème forme : Donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x-2)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{e^x+2} = 0$ .Donc la droite D_2 d'équation $y = x-2$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe .

3. On utilise le résultat de la partie A pour calculer la dérivée, avec $a = 1$:

$$f'(x) = 1 - \frac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2} = \frac{\left(e^x+2\right)^2 - 8e^x}{\left(e^x+2\right)^2} = \frac{\left(e^x-2\right)^2}{\left(e^x+2\right)^2}$$

4. Etude du signe de la fonction dérivée :

Une exponentielle étant toujours strictement positive, le dénominateur de la dérivée est strictement positif.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$. On obtient donc le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$:

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$\left(e^x-2\right)^2$	+	0	+
$\left(e^x+2\right)^2$	+		+
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$\ln 2$	$\nearrow$ $+\infty$

5. Représentation graphique

Partie C

1. la fonction h est de la forme $\frac{u'}{u} = \frac{e^x}{e^x+2}$ dont une primitive est donnée par $\ln u$, avec $u = e^x + 2$ donc :

$H(x) = \ln\left(e^x+2\right)$

2. On a : $f(x) = x + 2 + \frac{4e^x}{e^x+2} = x + 2 + 4h(x)$ donc une primitive de f est donnée par :

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+4H(x)=\frac{x^2}{2}+2x+4\ln(e^x+2)$$

3. L'unité d'aire associée au repère est égale à **1.u.a =2 × 2 = 4 cm²**. De plus, la fonction f est positive sur l'intervalle [0 ; 2], donc l'aire est donnée par :

$$I=\int_0^2 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^2=F(2)-F(0)=\left(\frac{2^2}{2}+2\times 2-4\ln(e^2+2)\right)-\left(4\ln 3\right)=2+4-4\ln(e^2+2)+4\ln 3$$

$$I=6-4\ln\left(\frac{e^2+2}{3}\right) \quad . \quad A=4\times I=4\left(6-\ln\left(\frac{e^2+2}{3}\right)\right)cm^2$$