

### ➤ Problème 8

Le plan  $P$  est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (L'unité graphique est 5 cm.). Le but du problème

est l'étude de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x}$

On note  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan  $P$ .

#### I - Étude d'une fonction auxiliaire

On note  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = e^x(x-2) - 1$ .

- Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .
- Étude des variations de  $g$ 
  - Calculer la fonction dérivée  $g'$  de la fonction  $g$  et étudier son signe sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
  - Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- Résolution de l'équation  $g(x) = 0$ 
  - Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  possède une unique solution, notée  $\alpha$ , appartenant à l'intervalle  $[1; 3]$ .
  - Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$ .
  - vérifier que  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 2}$  (on pourra utiliser  $g(\alpha) = 0$ )
- Déterminer le signe de  $g(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

#### II - Étude de la fonction $f$



- Étude de la limite en  $+\infty$ .
  - Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 + xe^{-x}}$
  - En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter graphiquement cette limite.
- Étudier la position relative de la courbe  $C$  et de la droite  $D$  d'équation  $y = 1$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- Étude des variations de  $f$ 
  - On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ . Démontrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + x)^2}$  où  $g$  est la fonction définie en 1.
  - Déduire de la question I.4., le sens de variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
  - Calculer  $f(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$  et montrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ .
- Construire la courbe  $C$  et la droite  $D$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

#### III - Calcul d'aire

On note  $B$  l'aire, exprimée en  $cm^2$  du domaine limitée par la courbe  $C$ , la droite  $D$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ .

- Hachurer sur le graphique le domaine  $B$ .
- Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- En déduire la valeur exacte de  $B$ , puis une valeur approchée arrondie au  $mm^2$ .