➢ ***Corrigé Problème 1***

Partie A

1. $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3x-4\right) = -4$; $\lim\limits_{x\to 0} 4\ln x = 4\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2+3x-4\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 4\ln x = 4\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

2. Soit g' la dérivée de g. $g'(x) = 2x + 3 + \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x^2+3x+4}{x}$

3. g'(x) est du signe de $2x^2+3x+4$, calculons les racines de ce polynôme :
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times 2\times 4 = 9 - 32 = -23 < 0$, donc $2x^2+3x+4$ n'a pas racine et reste toujours strictement positif, (prendre le signe de $a = 2$) par conséquent g'(x) > 0 sur]0 ; +∞[, il en résulte que g est croissante sur]0 ; +∞[

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	+
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗ 0	$+\infty$

4. g(1) = 1 + 3 - 4 + 4 ln 1 = 0 donc g(x) < 0 sur]0 ; 1[et
g(x) > 0 sur]1;+∞[.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	+	

Partie B

1. a. limite de f en + ∞.

$f(x) = x + 3\ln x - \dfrac{4\ln x}{x}$: $\lim\limits_{x\to +\infty} 3\ln x = 3\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 4\dfrac{\ln x}{x} = 4\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$

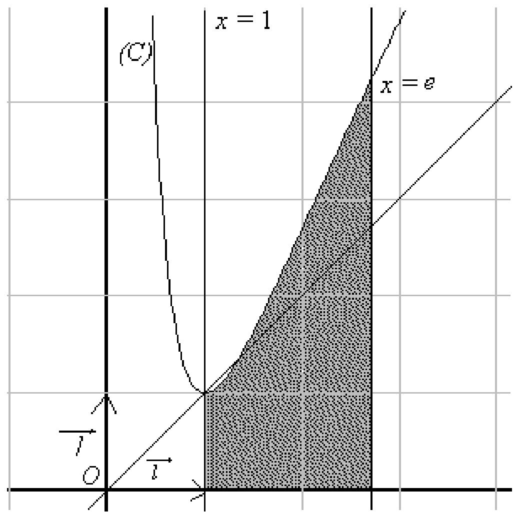
Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b. la limite de f en 0 ; $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$: $x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x = x + 3\ln x - \dfrac{4\ln x}{x} = f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4}{x} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(3 - \dfrac{4}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x = +\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

On peut en déduire que la droite d'équation x = 0 est asymptote à (C)

2. a. Pour tout x strictement positif : $f(x) = x + 3\ln x - \dfrac{4\ln x}{x}$



$$f'(x) = 1 + \frac{3}{x} - 4\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = 1 + \frac{3}{x} - 4\frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 3x - 4(1 - \ln x)}{x^2} = \frac{x^2 + 3x - 4 + 4\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. $f'(x)$ est du signe de g(x) dont le signe a été trouvé
Partie A 4.

c. $f(1) = 1 + 3\ln 1 - 4\dfrac{\ln 1}{1} = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	+
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x) = x \Leftrightarrow x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x = x \Leftrightarrow \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x = 0$

$3-\frac{4}{x}=0$ et $\ln x=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ *ou* $x=1$, donc $S=\left\{1;\frac{4}{3}\right\}$.

4. voir graphique
5. La droite d'équation $y = x$ coupe la courbe (C) en deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4/3 ; 4/3)

Partie C

1. $F(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3x\ln x-2(\ln x)^2$; $F'(x)=x-3+3\ln x+3-2\times 2\frac{\ln x^2}{x}$ et on a :

$F'(x)=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}=f(x)$. donc F est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. a.

b. $\int_1^e f(x)dx=\left[F(x)\right]_1^e=F(e)-F(1)=\frac{e^2}{2}-3e+3e\ln e-2(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-3\right)=\left(\frac{e^2}{2}-2+\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^2+1\right)$

$1u.a=3^2=9cm^2$, donc $A=9\times\frac{1}{2}\left(e^2+1\right)=\frac{9}{2}\left(e^2+1\right)cm^2\approx 37,75cm^2$