Fonction Logarithme Népérienne

- ***Problème 1***

Partie A Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2+3x-4+4\ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que : $g'(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x}$,puis dresser le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$.

3. Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+3\ln x-\dfrac{4\ln x}{x}$

On appelle ($\boldsymbol{C}_f$) la courbe de f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité 3 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en 0 ; on remarquera que : $f(x)=x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$. Que peut-on en déduire ?

2. a. Montrer que pour tout x strictement positif : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x+\left(3-\dfrac{4}{x}\right)\ln x$

Donner les solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$ de l'équation $f(x)=x$.

4. Tracer ($\boldsymbol{C}_f$) et la droite d'équation $y=x$.

5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x+3x\ln x-2(\ln x)^2$

est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. On considère dans le plan le domaine (D) délimité par la courbe ($\boldsymbol{C}_f$), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.

a. Hachurer le domaine (D).

b. Calculer l'aire du domaine (D) en unités d'aires puis en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm^2 près