➢ ***Corrigé Problème 2***

I) Etude d'une fonction auxiliaire g

1) $g'(x) = 2x + \frac{2}{x} = \frac{2x^2+2}{x}$

2) $g'(x) > 0$ comme somme de deux expressions strictement positive sur]0; +∞[donc g est strictement croissante sur] $]0;+\infty[$.

3) Résolution de l'équation g(x) = 0.

a) $g(1) = 1-4+2\ln 1 = -3 < 0$ et $g(2) = 2^2 - 4 + 2\ln 2 = 2\ln n2 > 0$. g est strictement croissante sur [1; 2] , g est dérivable sur $[1;2]$ et g(1) < 0 < g(2) , donc l'équation g(x) = 0 possède une solution unique α sur l'intervalle $[1;2]$.

b) g(1,70) < 0 < g(1,71) donc 1,70 < α < 1,71

4) On en déduit que g(x) < 0 sur]0 ; α [et g(x) > 0 sur]α ; + ∞[et g(α) = 0

II) Etude de la fonction f

1) La droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe C

$\lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} -2\ln x = -2\lim\limits_{x\to 0}\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\ln x}{x} = -2\lim\limits_{x\to 0}\ln x \times \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$, et on a finalement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

2) a) Déterminer la limite de f en +∞. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\ln x}{x} = -2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $h(x) = f(x) - (x-1) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\ln x}{x} = -2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right] = 0$

c) $f(x) = x-1 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. donc l'abscisse du point d'intersection de C et D est e et son ordonnée est $e-1$(en remplaçant x = e dans l'équation de D , on trouve $y = e-1$)

d) $h(x) = f(x) - (x-1) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{2(1-\ln x)}{x}$, $f(x)-(x-1)$ est du signe de $1-\ln x$,

$1-\ln x > 0$ si et seulement si $\ln x < 1$ soit $x < e$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0;e]$, la courbe C est au dessus de la droite D .

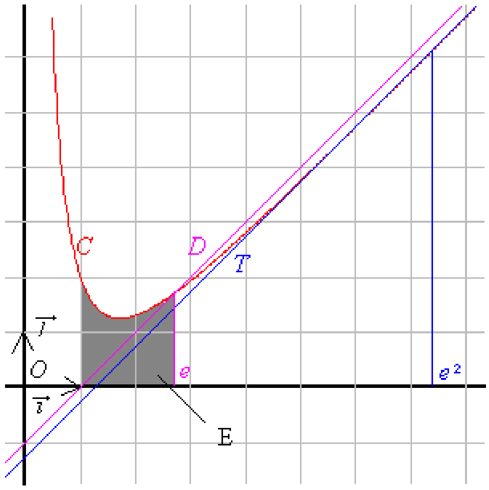
sur l'intervalle [e ; +∞[la courbe C est en dessous de la droite D

3) Etude des variations de f.

a) $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - 2\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{2}{x^2} - 2\frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2-4+2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

b) $f'(x)$ est donc du signe de g(x) , on en déduit les variations de f :

x	0			α		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



4) On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e^2.

$$f'(e^2)=\frac{e^4-4+2\ln e^2}{e^4}=\frac{e^4-4+4\ln e}{e^4}=1$$

le coefficient directeur de la tangente T est le même que le coefficient directeur de la droite D soit 1.

5)

III) Calcul d'une aire

1) $H(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+2\ln x-(\ln x)^2$: $H'(x)=x-1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}$

donc H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2)

a) voir figure

b) $S=\int_1^e f(x)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}-x+2\ln x-(\ln x)^2\right]_1^e=\left[\dfrac{e^2}{2}-e+2\ln e-(\ln e)^2-\left(\dfrac{1}{2}-1+2\ln 1-(\ln 1)^2\right)\right]$

$$S=\left[\frac{e^2}{2}-e+2\ln e-(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-1+2\ln 1-(\ln 1)^2\right)\right]=\left(\frac{e^2}{2}-e+\frac{3}{2}\right)u.a$$

c) valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2 (2 chiffres après la virgule)
l'unité d'aire est 4 cm² on a S = 9,90 cm²