➤ ***Corrigé Problème : 3***

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	$+$
$g(x)$	‖	$-\infty \nearrow 0$	$\nearrow +\infty$

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$

par : $g(x)=x^2-1+\ln x$.

1. $g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}$, pour $x\in]0;+\infty[$; $2x^2+1>0$ et $\dfrac{1}{x}>0$, donc $g'(x)>0$. on en déduit que la fonction g est croissante (strictement) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. $g(1)=1^2-1+\ln 1=0$
en utilisant le fait que la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et g(1) = 0 on en déduit le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	‖ $-$	0	$+$

Partie B
1. $f'(x)=a-\dfrac{1-\ln x}{x^2}$
2. La courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, f(1) = 0
et $f'(1)$ = 0 soit : $f(1)=0 \Leftrightarrow a+b-\dfrac{\ln 1}{1}=a+b=0$; $f'(1)=a-\dfrac{1-\ln 1}{1^2}=a-1=0$

Donc $a=1$ et $b=-1$ et enfin $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

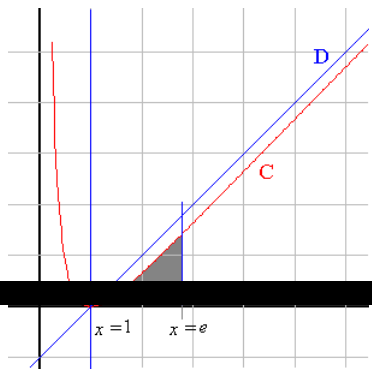
Partie C : Etude de la fonction ***f***
1. a. $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$; $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln x\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$
la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe C
b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. a. $f'(x)=1-\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$
   b. f '(x) est du signe de g(x) sur]0 ; + ∞[, on en déduit les variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

c. 0 est le minimum absolue de la fonction f sur son ensemble de définition on $f(x)\geq 0$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle]0 ; + ∞[.
3. On considère la droite D d'équation y = x - 1.
a. $f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$
donc la droite d'équation y = x - 1 est asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.
b. Etudions le signe de $f(x)-(x-1)$ d'après a. il est du signe de $-\ln x$ soit :
$-\ln x>0$ équivaut à $\ln x<0$ ou encore $\ln x<\ln 1$ soit $x<1$:
si $x<1$ alors $f(x)-(x-1)>0$ donc sur l'intervalle]0 ; 1 [, la courbe C est au dessus de l'asymptote D.
si $x>1$ alors $f(x)-(x-1)<0$ donc sur l'intervalle]1 ; + ∞[, la courbe C est au dessous de l'asymptote D.
Si x = 1, la courbe C et la droite D se coupent en un point de



coordonnées (1; 0)

c.

Partie D : Calcul d'aire

1. a. $H(x)=(\ln x)^2$: $H=u^2$ avec $u=\ln x$ et $u'=\dfrac{1}{x}$,

$H'=2u'u$ et on a : $H'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$

b. une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle]0 ; + ∞[est

la fonction F définie par : $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-x-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

2. a. b.

$$S=\int_1^e f(x)dx=\left[F(x)\right]_1^e=\left[\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\left[\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)\right]=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)u.a$$

$$1u.a=4cm^2\Rightarrow A=4\left(\frac{e^2}{2}-e\right)=\left(2e^2-4e\right)cm^2$$