- ***Corrigé Problème 5***

Partie A $f(x)=x^2+ax+b-2\ln x$

Déterminons les valeurs de a et de b tels que la courbe C d'équation $y=f(x)$ passe par $A(1\,;-3)$ et que la tangente à C en A soit parallèle à l'axe Ox.

On doit avoir : $f(1)=-3$ et $f'(1)=0$. Or $f'(x)=2x+a-\dfrac{2}{x}$

On en déduit : $f(1)=1+a+b-2\ln 1=a+b-1=-3$ donc : $a+b=-4$ $f'(1)=2+a-\dfrac{2}{1}=a=0$

donc : $a=0$ et $b=-4$. La fonction f cherchée est donc définie par : $f(x)=x^2-4-2\ln x$.

Partie B

1.a) On a clairement : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-4\right)=-4$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

On en déduit que la droite d'équation : $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe au voisinage de 0 (l'axe Oy est asymptote à C).

2.a)Vérifier pour $x>0$: $f(x)=x\left(x-\dfrac{4}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}\right)$. C'est évident !

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{x}-2\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ .Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3. On peut écrire : $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

Signe de f'(x). Tableau de variation de f.

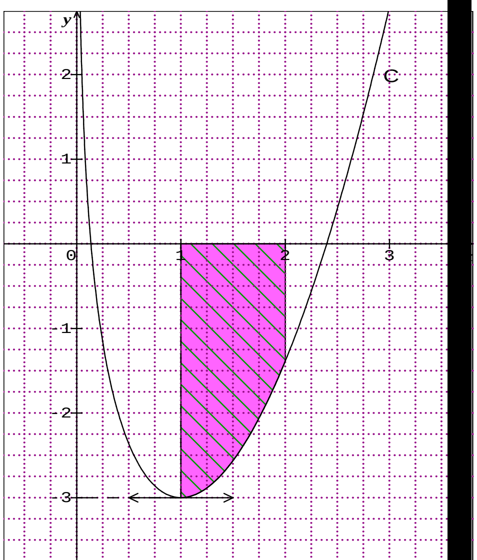
x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	+	
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	-3	↗	$+\infty$

4.Signe de $f(x)$ lorsque $x\in[1;2]$.

On sait que $f(1)=-3$. Par ailleurs $f(2)=2^2-4-2\ln 2=-2\ln 2$.

Donc $f(2)<0$ .La fonction f étant dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[1;2]$ on en déduit qu'elle est strictement négative sur cet intervalle.

5.Courbe C.



Partie C. Calcul de $H'(x)$. On a : $H(x)=x\ln x-x$. Donc : $H'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$

En déduire une primitive de f sur I. Une primitive de f sur I est définie par :

$F(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x-2(x\ln x-x)$ ou encore : $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x-2x\ln x$

Calcul de l'aire de Δ. La fonction f étant négative sur l'intervalle $[1;2]$,

L'nité d'aire vaut 4 cm^2 Donc on peut écrire que cette aire est donnée

par : $Aire(\Delta)=4\times\left(-\int_1^2 f(x)dx\right)=4\times\left[-F(x)\right]_1^2=4\times\left[F(1)-F(2)\right]$ Donc : $F(1)=\dfrac{1}{3}-2-2\ln 1=-\dfrac{5}{3}$ et

$F(2)=\dfrac{8}{3}-4-4\ln 2$, donc $Aire(\Delta)=4\times\left[F(1)-F(2)\right]=4\times\left(-\dfrac{5}{3}-\dfrac{8}{3}+4+4\ln 2\right)=4\left(4\ln 2-\dfrac{1}{3}\right)$

$Aire(\Delta)=16\ln 2-\dfrac{4}{3}\approx 9,75cm^2$.