

➤ **Corrigé Problème 6**

1.a. $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$; $x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$. $S = \{1/2; 2\}$

1.b sur l'intervalle $]0; +\infty[$, résolvons l'équation $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$. Posons $X = \ln x$. L'équation devient $2X^2 - 5X + 2 = 0$. On a vu que $X = 1/2$ ou $X = 2$. $\ln x_1 = 1/2 \Leftrightarrow x_1 = e^{1/2} = \sqrt{e}$; $\ln x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = e^2$

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$

1.a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2)$ or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2(\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -5\ln x = +\infty$

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$. La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x (2(\ln x) - 5) + 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2(\ln x) - 5) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3.a f est dérivable sur $]0; +\infty[$; $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$ $f'(x) = 2 \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - 5 \times \frac{1}{x} = \frac{4\ln x}{x} - \frac{5}{x}$.

(car $(u^2)' = 2u'u$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$) pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{4\ln x - 5}{x}$.

3.b variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4\ln x - 5}{x}$ $x \in]0; +\infty[$, donc $x > 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\ln x - 5 = 0 \Leftrightarrow 4\ln x = 5 \Leftrightarrow \ln x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = e^{5/4}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4\ln x - 5 > 0 \Leftrightarrow 4\ln x > 5 \Leftrightarrow \ln x > \frac{5}{4} \Leftrightarrow x > e^{5/4}$

$f(e^{5/4}) = 2(\ln e^{5/4})^2 - 5\ln(e^{5/4}) + 2 = 2(5/4 \ln e)^2 - 5 \times \frac{5}{4} \ln e + 2$

$= 2 \times \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 2 = \frac{25 - 50 + 16}{8} = -\frac{9}{4}$

x	0	$e^{5/4}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$+\infty$ ↘ -9/4 ↗ $+\infty$	

x	0	$\sqrt{e}$	e^2	$+\infty$
$f(x)$		+ 0 -	0 +	

c. d'après 1.b, on a : $f(x) = 0$ si $x = \sqrt{e}$ ou $x = e^2$

En regardant le tableau de variation, on peut en déduire le signe de f sur $]0; +\infty[$.

$f(x) > 0$ pour $x \in]0; \sqrt{e}[\cup]e^2; +\infty[$; $f(x) < 0$ pour $x \in]\sqrt{e}; e^2[$; $f(x) = 0$ pour $x = \sqrt{e}$ et $x = e^2$.

3. Equation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$:

$y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$; $f'(\sqrt{e}) = \frac{4\ln(\sqrt{e}) - 5}{\sqrt{e}} = \frac{4 \times 1/2 - 5}{\sqrt{e}} = -\frac{3}{\sqrt{e}}$;

$f(\sqrt{e}) = 2(\ln(\sqrt{e}))^2 - 5\ln(\sqrt{e}) + 2 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} + 2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{-4}{2} + 2 = 0$; $y = \frac{-3}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e}) = \frac{-3}{\sqrt{e}}x + 3$

donc (T) : $y = \frac{-3}{\sqrt{e}}x + 3$.

5.a. voir courbe ci-contre

b. Calculons $F'(x)$. $F(x) = 2x(\ln x)^2 - 9x \ln x + 11x$.

$$F'(x) = 2(\ln x)^2 + \frac{4 \times x \times \ln x}{x} - 9 \ln x - 9x \times \frac{1}{x} + 11$$

$$F'(x) = 2(\ln x)^2 + 4 \ln x - 9 \ln x - 9 + 11 \text{ d'où}$$

$F'(x) = 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 2 = f(x)$, F est bien une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

$$F(e^2) = 2e^2 (\ln e^2)^2 - 9e^2 \ln e^2 + 11e^2$$

$$= 2e^2 (2 \ln e)^2 - 18e^2 \ln e + 11e^2$$

$$= 8e^2 - 18e^2 + 11e^2 = -e^2$$

$$F(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} (\ln \sqrt{e})^2 - 9\sqrt{e} \ln \sqrt{e} + 11\sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2} - \frac{9}{2}\sqrt{e} + 11\sqrt{e}$$

$$= -4\sqrt{e} + 11\sqrt{e} = 7\sqrt{e} \quad \text{donc} \quad F(\sqrt{e}) - F(e^2) = 7\sqrt{e} - (-e^2) = 7\sqrt{e} + e^2$$

